Übung Nr.14

59. Kopplung zweier Isospin-1-Teilchen

Als „Isospin“ bezeichnen Teilchenphysiker eine näherungsweise Symmetrie einiger Teilchen, die sich mathematisch wie Spin-Zustände behandeln lassen. Somit verhalten sich die drei „Pionen“ als die drei Bestandteile eines (Iso-)Spin-1-Tripletts $\{|j=1,m\rangle\}$ mit $\pi^+ \equiv |1,1\rangle$, $\pi^0 \equiv |1,0\rangle$ und $\pi^- \equiv |1,-1\rangle$.

Betrachten Sie Zustände mit zwei Pionen, und zwar $|\pi^+\pi^-\rangle$, $|\pi^-\pi^+\rangle$, $|\pi^0\pi^0\rangle$, $|\pi^+\pi^0\rangle$ sowie $|\pi^0\pi^+\rangle$. Schreiben Sie diese Zustände als Linearkombinationen der Zustände $|2,m\rangle$, $|1,m\rangle$ und $|0,0\rangle$.

Hinweis: Unten `http://pdg.lbl.gov/2017/reviews/rpp2016-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf` können Sie eine Tabelle von Clebsch–Gordan-Koeffizienten finden.

60. Kopplung zweier Spin-1-Teilchen

Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-1-Teilchen mit Spins $\hat{\vec{S}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{S}}^{(2)}$ sei

$$\hat{H} = A\,\hat{\mathbb{1}} + B\,\hat{\vec{S}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{S}}^{(2)} + C\big(\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}\big), \tag{1}$$

mit reellen Konstanten A, B, C. Finden Sie die Energieeigenwerte des Systems. Gibt es Entartung?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst einen Satz von Operatoren, die mit $\hat{H}$ kommutieren.

61. Harmonischer Oszillator unter linearen Störung

Zum Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators wird eine lineare Störung $\hat{W}$ addiert, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, mit

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad , \quad \hat{W} = m\omega^2\alpha\hat{x} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

i. Berechnen Sie die Korrektur zu den Energien der Eigenzustände des harmonischen Oszillators in erster Ordnung der Störungsentwicklung.

Hinweis: Sie können entweder mit den in der Vorlesung angegebenen Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators arbeiten — dann ist die Rekursionsformel (7) der Aufgabe **42.** nützlich —, oder Auf- und Absteigeoperatoren benutzen und $\hat{x}$ dadurch ausdrücken.

ii. Eigentlich ist das Problem exakt lösbar! Geben Sie die exakten Energieeigenwerte an und vergleichen Sie sie mit dem Resultat aus **i.**.

*62. Quantenmechanik des starren Körpers

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2}{2I_x} + \frac{\hat{L}_y^2}{2I_y} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}, \tag{3}$$

wobei die $\hat{L}_j$ Bahndrehimpulsoperatoren und die I_j Konstanten sind. Der Operator $\hat{H}$ beschreibt übrigens die Bewegung eines freien starren Körpers mit den Hauptträgheitsmomenten I_j. Unter welchen Umständen ist $\langle\hat{L}_x\rangle$ zeitunabhängig?