

Übung Nr.13

54. Wasserstoffatom

i. Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius a den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton-Abstandes im Grundzustand des Wasserstoffatoms darstellt, d.h. dass $r^2 R_{1,0}(r)^2$ für $r = a$ maximal wird.

Hinweis: $R_{1,0}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a}$.

ii. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ und $\langle 1/r \rangle$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch a aus.

iii. Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \quad (1)$$

mit $e^2 \equiv q_e^2/4\pi\epsilon_0$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den bekannten Energie-Eigenwerten E_n des Wasserstoffatoms. Wie ist die Beziehung $n > \ell$ in dieser Hinsicht „verständlich“?

55. Rydberg-Atome mit maximalem Bahndrehimpuls

Die normierten Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms mit maximaler Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = n - 1$ sind der Form $\psi_{n,n-1,m_\ell}(\vec{r}) = R_{n,n-1}(r) Y_{n-1,m_\ell}(\theta, \varphi)$ mit

$$R_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!} a} \left(\frac{2r}{na}\right)^n \frac{e^{-r/na}}{r} \quad (2)$$

mit dem Bohrschen Radius a .

Bestimmen sie den wahrscheinlichsten Wert r_{max} von r im Zustand $\psi_{n,n-1,m_\ell}$. Vergleichen Sie r_{max} mit dem Erwartungswert $\langle r \rangle$ in diesem Zustand.

56. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der isotrope dreidimensionale harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ beschrieben.

i. Machen Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten. Zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für 3 entkoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Wie lautet also das Energiespektrum des dreidimensionalen Oszillators?

Hinweis: $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$.

ii. Wie lautet der Entartungsgrad von E_n ?

iii. Wegen der Rotationssymmetrie des Potentials haben wir es hier mit einem Zentralkraftproblem zu tun, das sich mit der gleichen Methode wie das Wasserstoffatom (siehe Vorlesung vom 3. Juli) behandeln lässt.

Machen Sie den Potenzreihen-Ansatz („Frobenius-Methode“, siehe Vorlesung zum eindimensionalen Oszillator) zum Lösen der Radialgleichung, leiten sie die Rekursionsrelation für die Koeffizienten her, und bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit **i.** und **ii.**

57. Vertauschungsrelationen und Quantenzahlen

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

i. Falls $[\hat{H}, \hat{L}] = \hat{0}$ sind die Energie-Eigenwerte unabhängig von der magnetischen Quantenzahl m_ℓ , d.h. von den Eigenwerten einer der drei Komponenten von \hat{L} .

ii. Falls $[\hat{H}, \hat{L}^2] = \hat{0}$ sind die Energieniveaus unabhängig von der Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ .

***58. Anisotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator**

Betrachten Sie den anisotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2\hat{z}^2 \quad (3)$$

mit $\omega_x \equiv \omega(1 + \frac{1}{3}\delta)$ und $\omega_z \equiv \omega(1 - \frac{2}{3}\delta)$ wobei $\omega > 0$ und $0 \leq \delta < \frac{3}{2}\omega$. Geben Sie die Eigenwerte mit ihrem Entartungsgrad an.