Übung Nr.12

49. Bahndrehimpulsoperator (1)

Die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators lauten $\hat{L}_i \equiv [\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}]_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0}$ und $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\,\mathbb{1}$, verifizieren Sie die Gültigkeit der Vertauschungsrelationen

i. $[\hat{L}_i, \hat{x}_j] = \mathrm{i}\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{x}_k$ und $[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{p}_k \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$.

ii. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$.

iii. $[\hat{L}_i, \hat{\vec{r}}^{\,2}] = [\hat{L}_i, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = \hat{0} \quad \forall i \in \{1,2,3\}$.

iv. Der Hamilton-Operator eines Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + V(\hat{\vec{r}}). \tag{1}$$

Unter welchen Bedingungen über das Potential $V(\vec{r})$ ist $\hat{\vec{L}}$ eine Konstante der Bewegung?

50. Verallgemeinerter Drehimpulsoperator (1)

Seien $\hat{J}_i$ mit $i = 1,2,3$ (bzw. $i = x,y,z$) die Komponenten eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$. Zeigen Sie anhand der *Lie-Algebra-Beziehung* (der Drehgruppe) $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \mathrm{i}\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$ die Vertauschungsrelation

$$[\hat{\vec{J}}^{\,2}, \hat{J}_i] = \hat{0} \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \tag{2}$$

51. Verallgemeinerter Drehimpulsoperator (2)

Seien $\hat{J}_i$ mit $i = 1,2,3$ (bzw. $i = x,y,z$) die Komponenten eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$. Das System sei im gemeinsamen Eigenzustand $|j,m\rangle$ des Satzes $\{\hat{\vec{J}}^{\,2}, \hat{J}_z\}$.

i. Zeigen Sie, dass $\langle\hat{J}_i\rangle \equiv \langle m,j\,|\,\hat{J}_i\,|m,j\rangle = 0$ für $i = x$ oder y.

ii. Zeigen Sie, dass die Varianz von $\hat{J}_i$ für $i = x$ oder y durch

$$\langle m,j\,|\big(\hat{J}_i - \langle\hat{J}_i\rangle\big)^2|m,j\rangle = \frac{j(j+1)-m^2}{2}\hbar^2 \tag{3}$$

gegeben ist.

52. Bahndrehimpulsoperator (2)

Betrachten Sie $\hat{\vec{L}} \equiv -\mathrm{i}\hbar\,\vec{r}\times\vec{\nabla}$ in der Ortsdarstellung mit Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

i. Leiten Sie die folgenden Darstellungen der kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulses her:

$$\hat{L}_x = -\mathrm{i}\hbar\left(-\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad , \quad \hat{L}_y = -\mathrm{i}\hbar\left(\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad , \quad \hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{4}$$

Folgern Sie daraus die Darstellung der Operatoren $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$.

ii. In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ für $\ell = 2$ und $m \in \{-2,-1,0,1,2\}$ gegeben. Prüfen Sie die Beziehungen

$$\hat{L}_+Y_{\ell\ell}(\theta,\varphi) = 0 \quad , \quad \hat{L}_-Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)}\,\hbar\,Y_{\ell m-1}(\theta,\varphi). \tag{5}$$

iii. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Lie-Algebra-Beziehung $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_z$.

*53. Warum ℓ und m beim Bahndrehimpulsoperator ganzzahlig sind

Es sei $\hat{a}_j \equiv \dfrac{\hat{x}_j + \mathrm{i}\hat{p}_j}{\sqrt{2\hbar}}$ für $j = 1, 2$ und damit

$$\hat{A} \equiv \frac{\hat{a}_1 + \mathrm{i}\hat{a}_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \hat{B} \equiv \frac{\hat{a}_1 - \mathrm{i}\hat{a}_2}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

i. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{a}_1, \hat{a}_2]$, $[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger]$, $[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2]$, $[\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger]$ und $[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger]$ (für $j = 1, 2$), und zeigen Sie, dass gilt:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger] = \hat{0} \quad , \quad [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = [\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}} \quad \text{und} \quad [\hat{A}, \hat{B}^\dagger] = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}] = \hat{0}. \tag{7}$$

ii. Vergleichen Sie die Vertauschungsrelationen in Gl. (7) mit denen für die Auf- und Absteigeoperatoren für harmonische Oszillatoren. Was schließen Sie daraus für das Spektrum der Operatoren $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ und $\hat{B}^\dagger\hat{B}$?

iii. Drücken Sie die 3. Komponente des Bahndrehimpulsoperators durch die $\hat{a}_j$ und $\hat{a}_j^\dagger$ aus, und zeigen Sie, dass $\hat{L}_3 = \hbar(\hat{B}^\dagger\hat{B} - \hat{A}^\dagger\hat{A})$ ist.

iv. Warum ist m also ganzzahlig? und ℓ?