Übung Nr.11

44. Harmonischer Oszillator (2)

i. Frischen Sie Ihre Kenntnisse über das „Heisenberg-Bild“ auf. Zeigen Sie insbesondere, dass im Fall eines zeitunabhängigen Hamilton-Operators $\hat{H}$ die Heisenberg-Bild- und Schrödinger-Bild-Operatoren $\hat{H}_{\rm H}$ und $\hat{H}$ gleich sind. Berechnen Sie den Kommutator $\big[\hat{x}_{\rm H}(t), \hat{p}_{\rm H}(t)\big]$.

ii. Betrachten Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}_{\rm H}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\big[\hat{x}_{\rm H}(t), \hat{H}_{\rm H}\big] \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\hat{p}_{\rm H}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\big[\hat{p}_{\rm H}(t), \hat{H}_{\rm H}\big], \tag{1}$$

wobei $\hat{H}_{\rm H} = \hat{H}$ der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist. Ausgehend von den Tatsache, dass sich $\hat{H}_{\rm H}$ durch $\hat{x}_{\rm H}$, $\hat{p}_{\rm H}$ statt $\hat{x}$, $\hat{p}$ ausdrücken lässt, bestimmen Sie direkt die Lösungen für $\hat{x}_{\rm H}(t)$ und $\hat{p}_{\rm H}(t)$.

Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Die drei folgenden Aufgaben befassen sich mit den sogenannten kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ des harmonischen Oszillators: diese sind die Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2}$$

mit einem komplexen Eigenwert α.

45. Unbestimmtheitsrelation

i. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Benutzen Sie dabei die Eigenschaften der Auf- und Absteige-Operatoren.

ii. Berechnen Sie die Varianzen $\big\langle(\Delta\hat{x})^2\big\rangle$ und $\big\langle(\Delta\hat{p})^2\big\rangle$ sowie deren Produkt (und dessen Quadratwurzel).

46. Kohärente Zustände in der Energiebasis

Wie jeder Zustandsvektor lässt sich auch $|\alpha\rangle$ nach Energie-Eigenkets entwickeln:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \tag{3}$$

i. Zeigen Sie, dass für die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \tag{4}$$

gilt.

ii. Bestimmen Sie c_0 so, dass $|\alpha\rangle$ auf 1 normiert ist.

47. Zeitentwicklung

Zeigen Sie, dass kohärente Zustände auch unter Zeitentwicklung kohärente Zustände bleiben, aber dass sich der Eigenwert von $\hat{a}$ gemäß

$$\alpha(t) = \alpha(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$

mit der Zeit ändert.

*48. Quantenmechanischer Virialsatz

Ein eindimensionales System sei durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad \text{mit} \quad V(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^n \tag{6}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \neq -1$ beschrieben.

i. Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right]$.
Dabei dürfen Sie das folgende Ergebnis benutzen: der Kommutator von einer (beinahe beliebigen) Funktion f des Ortsoperators mit dem Impulsoperator ist $\left[f(\hat{x}), \hat{p}\right] = \mathrm{i}\hbar f'(\hat{x})$.

ii. Sei $|\phi_k\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$. Indem Sie den Erwartungswert des Kommutators $\left[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\right]$ im Zustand $|\phi_k\rangle$ berechnen, zeigen Sie die Beziehung

$$2\langle\phi_k|\hat{T}|\phi_k\rangle = n\langle\phi_k|V(\hat{x})|\phi_k\rangle, \tag{7}$$

wobei $\hat{T} \equiv \hat{p}^2/2m$. Prüfen Sie diese Relation für den Fall des harmonischen Operators.