# Übung Nr.10

## 40. Tunneleffekt durch eine rechteckige Potentialbarriere

Ziel dieser Aufgabe ist, die Streuzustände der stationären eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse $m$ im Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 \quad \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 \quad \text{für } |x| > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{1}$$

zu untersuchen, insbesondere die stationäre Lösung mit Energie $0 < E < V_0$, die einem aus $-\infty$ einfallenden Teilchen(strahl) entspricht. Seien $k > 0$ und $k' > 0$ durch

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad , \qquad V_0 - E \equiv \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \tag{2}$$

definiert.

**i.** Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten $T$ für die Streuung an dieser Potentialbarriere.

**ii.** Überzeugen Sie sich, dass die Bedingung $k'L \gg 1$ in den folgenden Situationen erfüllt ist: a) im „klassischen Limes“ $\hbar \to 0$; b) für eine große Masse $m \to \infty$; c) im Fall einer hohen Potentialbarriere $V_0 - E \to \infty$; d) für eine breite Potentialbarriere $L \to \infty$.

Zeigen Sie, dass für $k'L \gg 1$ der Koeffizient $T$ „exponential klein“ wird, und zwar

$$T \simeq \frac{16 k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2}\, \mathrm{e}^{-2k'L}. \tag{3}$$

## 41. Harmonischer Oszillator (1)

Die Wellenfunktion $\psi(t,x)$ eines Teilchens im Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ sei zur Zeit $t = 0$ durch

$$\psi(0,x) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)] \tag{4}$$

gegeben, wobei die $\psi_n$ die in der Vorlesung gegebenen Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung für diesen Oszillator sind.

**i.** Berechnen Sie die Normierungskonstante $A$.

**ii.** Bestimmen Sie $\psi(t,x)$ und $|\psi(t,x)|^2$.

**iii.** Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ als Funktionen der Zeit. Was erhalten Sie, wenn Sie in $\psi(0,x)$ die Funktion $\psi_1$ durch $\psi_2$ ersetzen?

## 42. Hermitesche Polynome

Die Hermiteschen Polynomen lassen sich aus der sog. *Rodrigues-Formel*[1]

$$H_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) \tag{5}$$

für $n \geq 0$ berechnen.

**i.** Benutzen Sie die Formel, um die Polynome mit $n = 0, 1, 2, 3$ zu berechnen — das Ergebnis sollte mit den in der Vorlesungen angegebenen Ausdrücken übereinstimmen! Können Sie argumentieren, warum die Formel (5) für jede natürliche Zahl $n$ ein Polynom vom Grad $n$ definiert?

[1] Die auf der wikipedia.de-Seite (vom 12. Juni 2017) unter der Bezeichnung „Physiker-Konvention“ angegebene Formel ist eigentlich eher die „Statistiker-Konvention“, vgl. die englischsprachige Seite. . .

**ii.** Überprüfen Sie, dass die Rodrigues-Formel eine Lösung der Hermiteschen Differentialgleichung

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \tag{6}$$

gibt.

**iii.** Zeigen Sie, dass aus der Rodrigues-Formel die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{7}$$

folgt, mit deren Hilfe — und den Ausgangspunkten $H_0(x) = 1$ und $H_{-1}(x) =$ Konstante — sich die Polynome auch berechnen lassen: geben Sie bitte $H_4(x)$ an!

**iv.** $H_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n$, so dass dessen Ableitung $H_n'(x)$ vom Grad $n-1$ ist. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{8}$$

gilt.

## *43. Neutronen im Gravitationsfeld

Die Zeitentwicklung eines Teilchens (Masse $m$), das im Gravitationsfeld $-g\,\vec{e}_z$ der Erde fällt und am Boden reflektiert wird, kann mit einem Potential der folgenden Form beschrieben werden:

$$V(z) = \begin{cases} mgz & \text{für } z \geq 0 \\ \infty & \text{für } z < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Sei $z_0 \equiv \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g}\right)^{1/3}$ eine typische Längenskala des Problems und $E_0 \equiv mgz_0$ die zugehörige Energieskala.

**i.** Welche Randbedingung soll bei $z = 0$ erfüllt werden? Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der stationären Schrödinger-Gleichung für das Potential (9).

*Hinweis*: Dabei kann die *Airy-Funktion* $\mathrm{Ai}(x)$, Lösung der Differentialgleichung $y''(x) - xy(x) = 0$ mit der Bedingung $y(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, nützlich sein.

**ii.** Stellen Sie die niedrigsten fünf Wellenfunktionen graphisch dar. (In Mathematica heißt die Airy-Funktion `AiryAi`, ihre Nullstellen `AiryAiZero`).

**iii.** Experimente wurden mit kalten Neutronen (Masse $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg $= 939,6$ MeV$/c^2$) am Laue–Langevin-Institut in Grenoble durchgeführt ($q$Bounce-Experiment). Welche Zahlenwerte (in Pikoelektronenvolt — peV!) nehmen dann die ersten fünf Energie-Eigenwerte an?