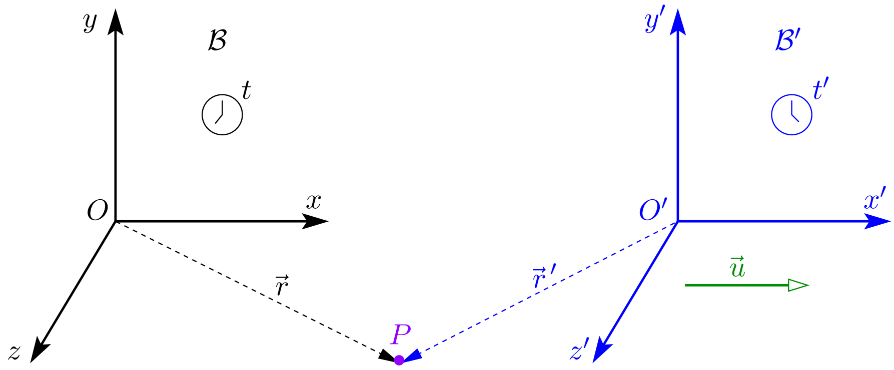
Übung Nr.1 (Präsenzübung)

1. Spezielle Lorentz-Transformationen

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Inertialsysteme, in denen orthogonale Koordinatensysteme (x, y, z), (x', y', z') mit parallelen Achsen gewählt werden. $\mathcal{B}'$ bewegt sich relativ zu $\mathcal{B}$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u} = u\,\vec{\mathrm{e}}_x$. Zur Zeit $t = t' = 0$ stimmen die Ursprünge der beiden Bezugssysteme überein.



Wie Sie in *Einführung in die Physik III* gesehen haben, sind die Zeit- und Ortskoordinaten eines (Raumzeit-)Punkts in beiden Systemen über die *spezielle Lorentz-Transformation* (= *Lorentz-Boost*)

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \tag{1}$$

miteinander verknüpft, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Der Kürze halber werden hiernach auch die Notationen $\beta \equiv u/c$ und $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ (Lorentz-Faktor) benutzt.

i. Die Transformation (1) lässt sich auch in Matrixform schreiben, und zwar als

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit einer 4×4-Matrix Λ. Geben Sie die Letztere an und bestimmen Sie ihre Determinante $\det \Lambda$. Wie lautet die inverse Matrix Λ^{-1}? (*Hinweis:* Λ^{-1} können Sie ohne Berechnung finden!)

ii. Rapidität eines Lorentz-Boosts

Die *Rapidität* ξ des Lorentz-Boosts (1) wird durch

$$\xi \equiv \operatorname{artanh} \frac{u}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \tag{3}$$

definiert.

a) Natürlich gilt $\tanh \xi = u/c = \beta$. Drücken Sie erstens $\cosh \xi$ und danach $\sinh \xi$ durch β und den damit assoziierten Lorentz-Faktor γ aus. (*Hinweis:* Sie können z.B. die Darstellung der Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen verwenden, oder $1/\cosh^2 \xi$ durch $\tanh \xi$ ausdrücken).

b) Wie lässt sich die Matrix Λ des Lorentz-Boosts aus **i.** mit der Rapidität ξ schreiben? Drücken Sie auch die Determinante $\det \Lambda$ und die inverse Matrix Λ^{-1} durch $\cosh \xi$ und $\sinh \xi$ aus.

c) Sei η die 4×4-Matrix $\eta \equiv \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Berechnen Sie das Produkt $\Lambda^{\mathsf{T}} \eta \Lambda$.

iii. Additivität der Rapiditäten

Ein drittes Inertialsystem $\mathcal{B}''$ bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}' = u'\,\vec{e}_x$ bezüglich $\mathcal{B}'$. Sei (x'', y'', z'') ein in $\mathcal{B}''$ festes orthogonales Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen von $\mathcal{B}'$ (und $\mathcal{B}$) sind. Die Matrix des Lorentz-Boosts von (ct', x', y', z') nach (ct'', x'', y'', z''), ähnlich der Transformation (2), wird mit Λ' bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen: $\cosh(a+b) = ?$, $\sinh(a+b) = ?$, $\tanh(a+b) = ?$

b) Drücken Sie Λ' durch die Rapidität $\xi' \equiv \operatorname{artanh} \frac{u'}{c}$ aus. Erklären Sie, warum das Produkt $\Lambda'\Lambda$ die Matrix der Transformation von (ct, x, y, z) nach (ct'', x'', y'', z'') darstellt und berechnen Sie dieses Produkt. (*Hinweis:* verwenden Sie die Ergebnisse aus **iii.a)**!). Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.