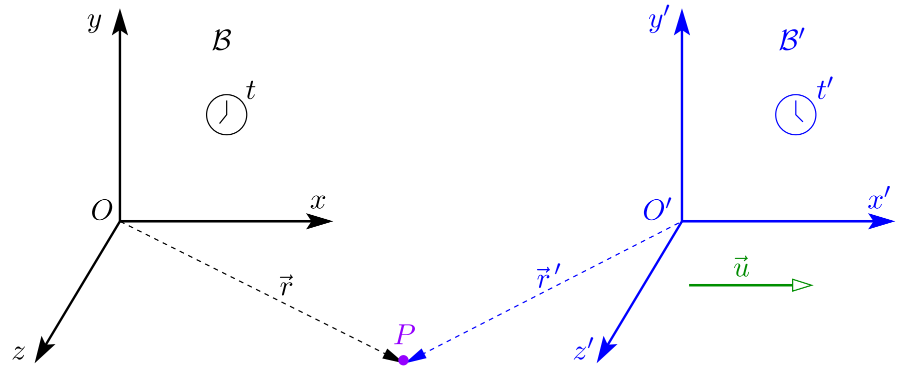
Übung Nr.1 (Präsenzübung)

1. Spezielle Lorentz-Transformationen

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Inertialsysteme, in denen orthogonale Koordinatensysteme (x, y, z), (x', y', z') mit parallelen Achsen gewählt werden. $\mathcal{B}'$ bewegt sich relativ zu $\mathcal{B}$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u} = u\,\vec{\mathrm{e}}_x$. Zur Zeit $t = t' = 0$ stimmen die Ursprünge der beiden Bezugssysteme überein.



Wie Sie in *Einführung in die Physik III* gesehen haben, sind die Zeit- und Ortskoordinaten eines (Raumzeit-)Punkts in beiden Systemen über die *spezielle Lorentz-Transformation* (= *Lorentz-Boost*)

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \tag{1}$$

miteinander verknüpft, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Der Kürze halber werden hiernach auch die Notationen $\beta \equiv u/c$ und $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ (Lorentz-Faktor) benutzt.

i. Die Transformation (1) lässt sich auch in Matrixform schreiben, und zwar als

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit einer 4×4-Matrix Λ. Geben Sie die Letztere an und bestimmen Sie ihre Determinante $\det \Lambda$. Wie lautet die inverse Matrix Λ^{-1}? (*Hinweis:* Λ^{-1} können Sie ohne Berechnung finden!)

ii. Rapidität eines Lorentz-Boosts

Die *Rapidität* ξ des Lorentz-Boosts (1) wird durch

$$\xi \equiv \operatorname{artanh} \frac{u}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \tag{3}$$

definiert.

a) Natürlich gilt $\tanh \xi = u/c = \beta$. Drücken Sie erstens $\cosh \xi$ und danach $\sinh \xi$ durch β und den damit assoziierten Lorentz-Faktor γ aus. (*Hinweis:* Sie können z.B. die Darstellung der Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen verwenden, oder $1/\cosh^2 \xi$ durch $\tanh \xi$ ausdrücken).

b) Wie lässt sich die Matrix Λ des Lorentz-Boosts aus **i.** mit der Rapidität ξ schreiben? Drücken Sie auch die Determinante $\det \Lambda$ und die inverse Matrix Λ^{-1} durch $\cosh \xi$ und $\sinh \xi$ aus.

c) Sei η die 4×4-Matrix $\eta \equiv \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Berechnen Sie das Produkt $\Lambda^{\mathsf{T}} \eta \Lambda$.

iii. Additivität der Rapiditäten

Ein drittes Inertialsystem $\mathcal{B}''$ bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}' = u'\,\vec{e}_x$ bezüglich $\mathcal{B}'$. Sei (x'', y'', z'') ein in $\mathcal{B}''$ festes orthogonales Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen von $\mathcal{B}'$ (und $\mathcal{B}$) sind. Die Matrix des Lorentz-Boosts von (ct', x', y', z') nach (ct'', x'', y'', z''), ähnlich der Transformation (2), wird mit Λ' bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen: $\cosh(a+b) = ?$, $\sinh(a+b) = ?$, $\tanh(a+b) = ?$

b) Drücken Sie Λ' durch die Rapidität $\xi' \equiv \operatorname{artanh} \frac{u'}{c}$ aus. Erklären Sie, warum das Produkt $\Lambda'\Lambda$ die Matrix der Transformation von (ct, x, y, z) nach (ct'', x'', y'', z'') darstellt und berechnen Sie dieses Produkt. (*Hinweis:* verwenden Sie die Ergebnisse aus **iii.a)**!). Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Übung Nr.2

2. Längenkontraktion

Wie werden Längenmessungen durchgeführt? Hierzu legt man einen Maßstab auf die zu messende Strecke und liest *gleichzeitig* die Positionen der Endpunkte ab. In Bezugssystemen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ werden identische ruhende Maßstäbe der Länge $l = l'$ verwendet, d.h. wenn sich beide Systeme relativ zueinander in Ruhe befinden sind sie gleich lang. Nun soll sich das System $\mathcal{B}'$ relativ zu $\mathcal{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u\,\vec{\mathrm{e}}_x$ entlang der x-Achse bewegen. Die Koordinatenachsen in beiden Bezugssystemen sind parallel zueinander.

Erfolgt die Bewegung parallel zu den Maßstäben, so misst ein Beobachter in Ruhe bezüglich $\mathcal{B}$, dass der relativ zu ihm bewegte Stab auf die Länge

$$l_\parallel = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, l'_\parallel \tag{1}$$

verkürzt ist. Sind die Maßstäbe orthogonal zur Bewegungsrichtung, z.B. beide entlang der y-Richtung (die gleich der y'-Richtung in $\mathcal{B}'$ ist), so stimmen beide Längen überein, $l_\perp = l'_\perp$. Dabei stellen die gestrichenen bzw. nicht-gestrichenen Größen die Längen dar, die durch einen in $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$ ruhenden Beobachter gemessen werden.

i. Beweisen Sie diese Aussagen, indem Sie die Lorentz-Transformation zwischen beiden System betrachten.

ii. Ein in $\mathcal{B}'$ ruhender Stab der Ruhelänge l' schließt mit der x'-Achse einen Winkel θ' ein. Welche Stablänge l und welchen Winkel θ zur x-Achse misst ein Beobachter in $\mathcal{B}$?

iii. Am LHC (Large Hadron Collider) finden nicht nur Proton-Proton-Kollisionen statt, sondern auch Blei-Blei-Stöße. Dabei werden Blei-Atomkerne (Ruhemasse $m_{\mathrm{Pb}} \approx 194$ GeV$/c^2$, Radius $R_{\mathrm{Pb}} \approx 6,3$ fm) zu einer Gesamtenergie von etwa 522 TeV beschleunigt.[1],

a) Was ist ihre Geschwindigkeit (relativ zur Vakuumlichtgeschwindigkeit)?

b) Was ist ihr Radius entlang der Flugrichtung für einen Beobachter, der relativ zum LHC ruht?

c) Zwei Blei-Kerne mit je 522 TeV stoßen aufeinander. Sei angenommen, dass sie durch einander fliegen, ohne abgebremst zu werden. Wie lange dauert das Durchqueren der Kerne? Die Antwort können Sie entweder in Yoktosekunden (1 ys $= 10^{-24}$ s) oder in fm$/c$ (1 fm$/c \approx 3,3$ ys) angeben.
Warum werden die stoßenden Kerne oft „kollidierende Pfannkuchen“ genannt?

3. Maßstabsparadoxon

Ein 20 m langer Stab liegt auf dem Boden vor einer 15 m langen Scheune. Ein olympischer Athlet hebt den Stab auf, läuft auf die Scheune mit einer Geschwindigkeit von 0,8c zu, betritt die Scheune durch die Vordertür und verlässt sie durch die Hintertür. Vorder- und Hintertür der Scheune öffnen und schließen sich automatisch und ohne Verzögerung.

i. Wie lang erscheinen Stab und Scheune für den Athleten? Wie lang erscheinen sie für einen Freund des Athleten, der neben der Scheune steht?

[1] 1 eV (*Elektronenvolt*) ist die Energiemenge, um welche die kinetische Energie eines Elektrons zunimmt, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 1 Volt durchläuft; 1 eV $\approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ J. Dann sind 1 GeV $= 10^9$ eV, 1 TeV $= 10^{12}$ eV (Giga-, Teraelektronenvolt) und 1 GeV$/c^2 \approx 1,783 \cdot 10^{-27}$ kg. Schließlich ist 1 fm $= 10^{-15}$ m (Femtometer).

ii. Ist der Stab jemals komplett innerhalb der Scheune, d.h. mit Vorder- und Hintertür gleichzeitig geschlossen? Zeichnen Sie jeweils ein Minkowski-Diagram, das den Vorgang aus der Sicht des Athleten und aus der Sicht des Freundes darstellt.

4. Kräftefreie relativistische Bewegung

Der Impuls eines freien relativistischen Teilchens ist durch $p^i = \gamma m v^i$ gegeben, wobei γ den Lorentz-Faktor bezeichnet, und genügt der Gleichung $\mathrm{d}p^i/\mathrm{d}t = 0$.
Beweisen Sie, dass diese Aussage äquivalent zum newtonschen Resultat $\mathrm{d}v^i/\mathrm{d}t = 0$ ist.

*5. Zwillingsparadoxon

Astronautin Leia hat einen Zwillingsbruder Luke. Während Luke auf Coruscant zurückbleibt, fliegt Leia nach Dagobah, das 3,25 Lichtjahre entfernt ist. Nach einer einjährigen Jedi-Ausbildung kehrt sie zurück. Ihr X-Wing erreicht eine Geschwindigkeit von $0{,}65c$. Aus Lukes Sicht ist Leia die ganze Zeit in Bewegung, während Luke auf Coruscant ruht. Laut Luke sollte daher Leia bei ihrer Rückkehr jünger sein als Luke. Aus Leias Sicht bewegt sich jedoch Luke mit Coruscant von ihr fort, während Leia in ihrem X-Wing ruht. Leia behauptet daher, dass Luke am Ende jünger sein sollte. Welcher der beiden Zwillinge ist nun wirklich älter, wenn Leia nach Coruscant zurückkehrt?

i. Stellen Sie den Verlauf der Reise aus Lukes Sicht dar. Zeichnen Sie hierfür ein Minkowski-Diagramm.

ii. Stellen Sie nun den Verlauf der Reise aus Leias Sicht dar. Zeichnen Sie auch hierfür ein Minkowski-Diagramm.

Hint: Nehmen Sie zur Einfachheit an, dass alle Beschleunigungsphasen beliebig kurz sind.

Präsenzübung Nr.2

P2. Lorentz-Boost in beliebiger Richtung

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Transformation zwischen den Koordinaten (t, x, y, z) eines Punkts bzgl. eines ersten Inertialsystems $\mathcal{B}$ und den Koordinaten (t', x', y', z') bzgl. eines zweiten Bezugssystems $\mathcal{B}'$, das sich relativ zu $\mathcal{B}$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ entlang der x-Achse bewegt, durch

$$t' = \gamma_u \left(t - \frac{ux}{c^2} \right), \quad x' = \gamma_u (x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z \tag{1}$$

mit $u \equiv |\vec{u}|$ und $\gamma_u \equiv 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$ gegeben ist. Ziel dieser Aufgabe ist, die äquivalenten Formeln für den Fall einer beliebig gerichteten Geschwindigkeit $\vec{v}$ zu bestimmen.

i. Der Ortsvektor $\vec{r}$ eines beliebigen Punkts lässt sich als $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$ zerlegen, wobei $\vec{r}_\parallel$ bzw. $\vec{r}_\perp$ parallel bzw. senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist. Drücken Sie $\vec{r}_\parallel$ durch $\vec{r}$ und $\vec{v}$ aus. (*Hinweis:* Skalarprodukt!)

ii. Wie transformiert sich $\vec{r}_\perp$ unter einem Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit $\vec{v}$? Wie transformiert sich $\vec{r}_\parallel$? und t? und schließlich $\vec{r}$?

Hinweis: Die gesuchte Transformation lautet $t \to t' = \gamma_v \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)$, $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma_v - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v}}{v^2} - \gamma_v \vec{v} t$ mit $v \equiv |\vec{v}|$ und $\gamma_v \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Übung Nr.3

6. Viererbeschleunigung

i. Die 4-Beschleunigung eines Punktteilchens mit 4-Geschwindigkeit u sei definiert durch

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

wobei τ die Eigenzeit des Teilchens bezeichnet. Zeigen Sie, dass das 4-Skalarprodukt $a^\mu u_\mu$ verschwindet.

ii. Das Teilchen bewege sich in x^3-Richtung. Drücken Sie die Komponenten a^μ der 4-Beschleunigung im Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht, durch die gewöhnliche 3-Beschleunigung $\vec{w}$ aus. Zeigen Sie, dass $a_\mu a^\mu = -\vec{w}^2$ gilt.

iii. Bestimmen Sie jetzt die Bahnkurve $x^3(t)$ (bzgl. eines festen Bezugssystems) eines Punktteilchens, das sich mit einer konstanten Beschleunigung $\vec{w}$ (bzgl. des momentanen Ruhesystems) in x^3-Richtung bewegt. Es sei $x^3 = \mathrm{d}x^3/\mathrm{d}t = 0$ zur Zeit $t = 0$.

iv. Um einen längeren Raumflug zu einem angenehmen Erlebnis zu machen, sollte man nicht auf die gewöhnliche Schwerkraft verzichten und in einem Raumschiff mit der konstanten Beschleunigung $|\vec{w}| = 9,8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ reisen. Wie lange dauert eine Reise zur Andromedagalaxie (Entfernung $2,5 \cdot 10^6$ Lichtjahre) für die Reisenden?

7. Viererkraft (1)

Laut dem zweiten newtonschen Gesetz ist die Beschleunigung eines nicht-relativistischen Teilchens proportional zur Kraft $\vec{F}$, die auf das Teilchen wirkt. In der Vorlesung wurde eine verallgemeinerte, vierdimensionale Version dieser Beziehung postuliert:

$$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu \quad \text{für } \mu = 0,1,2,3, \tag{1}$$

wobei u^μ die μ-te Komponente der Vierergeschwindigkeit und τ der Eigenzeit des Teilchens sind. Dabei ist F^μ die μ-te Komponente der „Viererkraft", deren Raumkomponenten sich im nicht-relativistischen Limes auf die newtonsche Kraft reduzieren.

Wie lautet der Raumteil der Viererkraft? Und deren Zeitkomponente F^0? Was beschreibt die Zeitkomponente der Gleichung (1)?

Hint: Um F^0 zu finden, kann man das Lorentz-Quadrat der Vierergeschwindigkeit benutzen.

8. Viererimpuls-Erhaltung

Ein ruhender Atomkern mit Masse $M = 5m$ zerplatze in drei gleiche Teile (je Masse m), deren 3-Impuls-Beträge $|\vec{p}_i|$ auch gleich sind. Geben Sie $|\vec{p}_i|$ an und skizzieren Sie die drei 3-Impulse.

9. Levi-Civita-Tensor

Sei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der völlig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor, mit der Konvention $\epsilon^{0123} = +1$. Beweisen die folgenden Gleichungen, indem Sie die Konstanten N_1, N_2, N_3 berechnen:

i. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = N_1$;

ii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta^\alpha_\mu$;

iii. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3\big(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu\big)$.

*10. Viererkraft (2)

Nehmen Sie an, dass, in Analogie zur Newtonschen Mechanik, ein skalares Potential $\Phi(\mathsf{x})$ existiert, wobei x der Orts-Vierervektor ist, sodass die Viererkraft als $F^\mu = -\partial^\mu \Phi$ geschrieben werden kann. Was gilt für den Betrag der Dreiergeschwindigkeit in einem statischen Feld? Ist dieses Ergebnis physikalisch sinnvoll?

Präsenzübung Nr.3

P3. Bewegung aufgrund einer konstanten Kraft

Ein Teilchen der Masse m unterliegt einer konstanten Kraft $\vec{F} = F\,\vec{e}_x$ (z.B. eine Punktladung in einem gleichförmigen elektrischen Feld). Zur Zeit $t = 0$ ruht es bei $x = 0$. Bestimmen Sie seine Position $x(t)$ als Funktion der Zeit. Wie lautet das Ergebnis für $t \ll mc/|F|$?

Hinweis: Die relativistische Verallgemeinerung des 2. newtonschen Gesetzes ergibt $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ mit dem relativistischen Impuls $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$.

Übung Nr.4

11. Relativistischer Dopplereffekt

Gegeben sei ein Inertialsystem $\mathcal{B}$, in dem ein Sender ruht. Dieser Sender emittiert eine elektromagnetische Welle mit dem Viererwellenvektor k:

$$\mathsf{k} = \begin{pmatrix} k^0 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $k^0 \equiv \omega/c$.

Sei $\mathcal{B}'$ ein weiteres Inertialsystem, das sich bezüglich $\mathcal{B}$ mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. In $\mathcal{B}'$ befindet sich ein ruhender Beobachter, der das Licht wahrnimmt. O.B.d.A. können wir $\vec{v}$ so wählen, dass dieser Vektor in Richtung der k^3-Komponente zeigt. Die Projektion von $\vec{k}$ auf die (x^1, x^2)-Ebene wird mit $\vec{k}_\perp$ bezeichnet und der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{k}$ mit θ.

Die Transformation des Viererwellenvektors im Lorentz-Boost von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ergibt dann

$$\omega' \equiv ck^{0'} = \gamma(\omega - vk^3), \quad \vec{k}'_\perp = \vec{k}_\perp, \quad k^{3'} = \gamma\left(k^3 - \frac{\omega v}{c^2}\right) \tag{2}$$

mit $v \equiv |\vec{v}|$.

i. Nutzen Sie die Ihnen bekannte (z.B. aus *Theoretische Physik I*) Dispersionsrelation von elektromagnetischen Wellen im Vakuum, um zu zeigen, dass der Viererwellenvektor k lichtartig ist.

ii. Zeigen Sie, dass

$$\omega' = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\omega \tag{3}$$

gilt. Drücken Sie dazu $k_\perp \equiv |\vec{k}_\perp|$ und k^3 mithilfe von θ und ω aus (*Hinweis:* geometrische Überlegungen) und setzen Sie diese Ausdrücke anschließend in die spezielle Lorentz-Transformation (2) ein. Wie lautet das Verhältnis ω'/ω für $\vec{v}$ parallel zu $\vec{k}$ („longitudinaler Doppler-Effekt“)? und für $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{k}$ („transversaler Doppler-Effekt“)?

12. Lorentz-Transformation des elektromagnetischen Feldes

Eine elektromagnetische ebene Welle mit elektrischem Feld $\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\, \vec{\mathrm{e}}_z$ breite sich in der (x, y)-Ebene aus, wobei $\vec{k} = k_x\vec{\mathrm{e}}_x + k_y\vec{\mathrm{e}}_y$. Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld in einem Bezugssystem, das sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegt.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu den Feldstärketensor in beiden Bezugssystemen.

13. Elektromagnetische Welle

Betrachten Sie eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(n_\nu x^\nu), \tag{4}$$

mit x-unabhängigen Vierervektoren ε^μ, n^μ und einer differenzierbaren skalaren Funktion f. Dieser Ausdruck von $A^\mu(\mathsf{x})$ ist Lorentz-kovariant.

i. Wie lauten die Komponenten $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$ des zugehörigen Feldstärketensors?

ii. Überprüfen Sie, dass die Transformation $\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda n^\mu$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der Maxwell-Gleichungen im Vakuum an. Zeigen Sie, dass die Lösung (4) für $n_\mu n^\mu \neq 0$ eine sogenannte „reine Eichung“ ist, d.h. dass sie durch eine Eichtransformation in $A^\mu(\mathsf{x}) = 0$ wegtransformiert werden kann.

iv. Sei nunmehr $n_\mu n^\mu = 0$. Zeigen Sie, dass das Feld (4) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügt, obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde.

14. Pauli-Matrizen

Die sog. Pauli-Matrizen sind die drei (offensichtlich spurlosen) Matrizen

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Berechnen Sie die Produkte $\sigma_i\sigma_j$ sowie die *Kommutatoren* $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
Hinweis: Diese mathematischen Ergebnisse werden in der Quantenmechanik relevant sein!

*15. Elektromagnetische Welle (2)

Fortsetzung der Aufgabe **13.**

v. Berechnen Sie die Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes. Welche (aus *Theoretische Physik I*) bekannten Ergebnisse finden Sie?

vi. Zeigen Sie, dass $\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu > 0$ für ein Feld gilt, das keine reine Eichung ist.[1]
Folglich kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu = 1$ ansetzen.

vii. Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\varepsilon^0 = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese (nicht-Lorentz-kovariante) Bedingung? Zeigen Sie, dass n^0 zu 1 normiert werden kann und überprüfen Sie, dass man die bekannte Form von $\Phi(t, \vec{r})$ und $\vec{A}(t, \vec{r})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

[1] Wie in der Vorlesung wird hier die $(-, +, +, +)$-Metrik angenommen.

Präsenzübung Nr.4

P4. Relative Geschwindigkeit

Seien zwei Teilchen mit den Viererimpulsen p_A^μ und p_B^μ. Finden Sie einen kovarianten Ausdruck für den Betrag von deren Relativgeschwindigkeit, d.h. der Geschwindigkeit des einen Teilchens im Ruhesystem des anderen.

Hinweis: Sie können das Viererprodukt $(p_A)^\mu(p_B)_\mu$ im Ruhesystem eines der Teilchen bilden.

P5. Viererkraft

Nehmen Sie an, dass, in Analogie zur Newtonschen Mechanik, ein skalares Potential $\Phi(\mathsf{x})$ existiert, sodass die Viererkraft als $f^\mu = -\partial^\mu\Phi$ geschrieben werden kann. Was gilt für den Betrag der Dreiergeschwindigkeit in einem statischen Feld? Ist dieses Ergebnis *physikalisch* sinnvoll?

Übung Nr.5

16. Linearalgebra (1): Matrixdarstellung eines linearen Operators

Ein dreidimensionales Koordinatensystem sei durch eine Orthonormalbasis $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$ gegeben. Der lineare Operator $\hat{A}$ drehe jeden Vektor um die 3-Achse um den Winkel $45^{\rm o}$ entgegen dem Uhrzeiger, d.h. Vektoren des ersten Quadranten in der (1,2)-Ebene wandern in Richtung des zweiten Quadranten. Gleichzeitig strecke der Operator die Vektoren entlang der 3-Richtung um den Faktor 5.

Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators bezüglich der Basis $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$? Welcher Vektor ergibt sich, wenn man den Operator auf den Vektor $|\Psi\rangle = |1\rangle + 2\,|2\rangle + 3\,|3\rangle$ anwendet?

17. Linearalgebra (2): Cauchy–Schwarz-Ungleichung

Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$\big|\langle\psi\,|\,\chi\rangle\big|^2 \leq \langle\psi\,|\,\psi\rangle\langle\chi\,|\,\chi\rangle$$

für Vektoren $|\psi\rangle,\ |\chi\rangle$ des Hilbert-Raums. In welchem Fall gilt die Gleichung?

18. Linearalgebra (3): Projektionen

Wir betrachten eine Projektion in einem dreidimensionalen Vektorraum, der durch die orthonormalen Basisvektoren $\{\,|1\rangle,\,|2\rangle,\,|3\rangle\}$ aufgespannt wird.

i. a) Wiederholen Sie die Definition für einen Projektionsoperator. Überprüfen Sie, ob die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung eines Projektors ist. Welche Eigenschaft der Projektoren haben Sie benutzt?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix P. Erklären Sie, warum gerade die von Ihnen gefundenen (recht speziellen) Eigenwerte auftreten. Beschreiben Sie verbal und mathematisch, worauf der Projektor projiziert.

ii. Seien $\hat{\mathcal{P}}_1,\,\hat{\mathcal{P}}_2$ zwei Projektoren eines Hilbert-Raums. Beweisen Sie die folgenden Ergebnisse:

a) $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2$ ist ein Projektor genau dann, wenn $\hat{\mathcal{P}}_1$ und $\hat{\mathcal{P}}_2$ vertauschbar sind, $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2 = \hat{\mathcal{P}}_2\hat{\mathcal{P}}_1$.

b) $\hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\mathcal{P}}_2$ ist ein Projektor genau dann, wenn $\hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2 = 0$.

19. Linearalgebra (4): eine nützliche Identität

Funktionen von Operatoren werden formal durch ihre Taylor-Reihe definiert, z.B.

$$\mathrm{e}^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A},\,\hat{B}$ sowie eine komplexe Zahl $t \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\,\mathrm{e}^{-t\hat{A}} = \hat{B} + t\big[\hat{A},\hat{B}\big] + \frac{t^2}{2!}\big[\hat{A},\big[\hat{A},\hat{B}\big]\big] + \cdots\,,$$

wobei die eckigen Klammern den Kommutator von Operatoren bezeichnen: $[\flat,\sharp] \equiv \flat\,\sharp - \sharp\,\flat$.

Hinweis: Definieren Sie $\hat{f}(t) \equiv \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\,\mathrm{e}^{-t\hat{A}}$ und berechnen Sie die Ableitungen $\mathrm{d}\hat{f}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\hat{f}^2/\mathrm{d}t^2$ usw.

*20. Linearalgebra (5): weitere Identitäten

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren eines Hilbert-Raums, welche beide mit deren Kommutator $\big[\hat{A},\hat{B}\big]$ vertauschen.

i. a) Finden Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung, welcher die Funktion $\hat{f}(t) \equiv \mathrm{e}^{t\hat{A}}\,\mathrm{e}^{t\hat{B}}$ genügt. (*Hinweis:* Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe **19.**)

b) Folgern Sie daraus die Identität

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}.$$

ii. Zeigen Sie die Identität

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\,\mathrm{e}^{\hat{A}}\,\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]},$$

wobei die Operatoren immer noch die gleichen Eigenschaften erfüllen.

Präsenzübung Nr.5

P6. Identitäten

kein Trick, Geduld erforderlich

Prüfen Sie die folgenden Identitäten, wobei $[\flat, \sharp] \equiv \flat\,\sharp - \sharp\,\flat$ bzw. $\{\flat, \sharp\} \equiv \flat\,\sharp + \sharp\,\flat$ den Kommutator bzw. Antikommutator zweier Operatoren bezeichnet:

i. (Jacobi-Identität): $\big[\hat{A}, \big[\hat{B}, \hat{C}\big]\big] + \big[\hat{B}, \big[\hat{C}, \hat{A}\big]\big] + \big[\hat{C}, \big[\hat{A}, \hat{B}\big]\big] = \hat{0}$, wobei $\hat{0}$ der Null-Operator ist.

ii. $\big[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}\big] = -\hat{A}\hat{C}\big\{\hat{D}, \hat{B}\big\} + \hat{A}\big\{\hat{C}, \hat{B}\big\}\hat{D} - \hat{C}\big\{\hat{D}, \hat{A}\big\}\hat{B} + \big\{\hat{C}, \hat{A}\big\}\hat{D}\hat{B}$.

P7. Bra-Ket-Notation

ein Trick $\rightsquigarrow$ eine Zeile!

Prüfen Sie *anhand der Bra-Ket-Algebra* die Identität $\mathrm{Tr}\big(\hat{A}\hat{B}\big) = \mathrm{Tr}\big(\hat{B}\hat{A}\big)$, wobei Tr die Spur eines Operators bezeichnet.

Übung Nr.6

In Aufgaben **21.–22.** sind $|a\rangle$, $|b\rangle$ beliebige Ket-Vektoren eines Hilbert-Raums $\mathscr{H}$; $\langle a|$, $\langle b|$ die damit assoziierten Bra-Vektoren; $\{|n\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}$; und $\hat{A}$ ein Operator $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

21. Bra-Ket-Notation: Skalarprodukt

Prüfen Sie anhand der in der Vorlesung gegebenen Definitionen und Notationen, dass das „Matrixelement“ $\langle a|\hat{A}|b\rangle$ den gleichen Wert annimmt, egal ob $\hat{A}$ erstens auf seine Rechte oder auf seine Linke wirkt.

22. Bra-Ket-Notation: Operatoren

i. Ein Operator auf $\mathscr{H}$ sei als $\hat{X} \equiv |b\rangle\langle a|$ definiert. Charakterisieren Sie die Wirkung von $\hat{X}$, indem Sie dessen *Kern* — die Menge der Elemente von $\mathscr{H}$, die auf den Nullvektor abgebildet sind — und dessen *Bild* angeben. Unter welcher Bedingung ist $\hat{X}$ diagonalisierbar?

ii. Sei angenommen, dass alle Skalarprodukte $\langle n|a\rangle$ und $\langle n|b\rangle$ (für alle $|n\rangle$) bekannt sind. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\hat{X}$ in der Basis $\{|n\rangle\}$.

iii. Zeigen Sie, dass $\hat{X}^\dagger = |a\rangle\langle b|$. Wann ist $\hat{X}$ hermitesch?

23. Spin-Eigenzustand entlang einer beliebigen Richtung

Sei $\vec{e}_{(\theta,\varphi)}$ der Einheitsvektor (im euklidischen Raum Ihres Alltagslebens!) in Richtung (θ,φ), wobei θ und φ die üblichen Polar- und Azimutwinkel eines Kugelkoordinatensystems sind.[1] Mithilfe dessen kartesischen Komponenten (e^x, e^y, e^z) und der drei Spin-Operatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ aus der Vorlesung kann man einen Operator

$$\hat{S}_{(\theta,\varphi)} \equiv \vec{e}_{(\theta,\varphi)} \cdot \hat{\vec{S}} \equiv e^x \hat{S}_x + e^y \hat{S}_y + e^z \hat{S}_z$$

bilden, dessen Eigenvektoren $|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle$, $|S^-_{(\theta,\varphi)}\rangle$ durch

$$\hat{S}_{(\theta,\varphi)}|S^\pm_{(\theta,\varphi)}\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S^\pm_{(\theta,\varphi)}\rangle$$

definiert sind.

i. Bestimmen Sie diese Eigenvektoren, ausgedrückt durch die Eigenvektoren $|S_z^+\rangle$, $|S_z^-\rangle$ zum Operator $\hat{S}_z$.

ii. Sei angenommen, dass sich ein Spin-$\frac{1}{2}$-System im Zustand $|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle$ befindet.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von S_z, den Wert $+\hbar/2$ zu finden?

b) Bestimmen Sie die Varianz von $\hat{S}_z$ in diesem Zustand, d.h. den Erwartungswert

$$\langle S^+_{(\theta,\varphi)}|\big(\hat{S}_z - \langle\hat{S}_z\rangle\big)^2|S^+_{(\theta,\varphi)}\rangle.$$

24. Exponential eines Operators

In der Vorlesung wurde ein Operator $\hat{\sigma}_z$ definiert, mit dessen Hilfe sich der Spin-Operator in z-Richtung als $\hat{S}_z = (\hbar/2)\hat{\sigma}_z$ schreiben lässt. Sei $\theta \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\hat{\sigma}_z/2}$, ausgedrückt durch $\hat{\sigma}_z$ und den 2-dimensionalen Identitätsoperator $\hat{\mathbb{1}}_2$, wobei das Exponential eines Operators in Aufgabe **19.** eingeführt wurde.

Hinweis: Berechnen Sie erstens $(\hat{\sigma}_z)^2$!

[1] Vgl. z.B. Abbildungen auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten`

25. Stern–Gerlach-Versuch mit polarisiertem Licht

In manchen Lehrbüchern (z.B. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Kap. 1.1) wird eine Analogie entwickelt zwischen (Reihenschaltungen von) Stern–Gerlach-Versuchen mit Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und ähnlichen Experimenten mit linear oder zirkular polarisiertem *klassischem* Licht.
Informieren Sie sich über diese Analogie (z.B.: $\vec{E}$-Felder analog zu den Eigenvektoren zu $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$) und erklären Sie sie Ihren Kommilitonen.

Präsenzübung Nr.6

In den folgenden Aufgaben bezeichnet $\hat{A}$ ein beliebiger hermitescher Operator auf einem Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ mit Eigenwerten $\{a_n\}$ und Eigenvektoren $\{|a_n\rangle\}$.

P8. Quadrat eines hermiteschen Operators

Beweisen Sie $\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle \geq 0$ für jeden beliebigen $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$.

P9. Unitärer Operator

Zeigen Sie, dass $\hat{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{A}}$ ein unitärer Operator ist. Geben Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{U}$ und $\hat{U}^\dagger$ an. Welchen Betrag haben die Eigenwerte jeweils?

Übung Nr.7

26. Unbestimmtheitsrelation

i. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $(\Delta_\psi \hat{S}_x)^2$ und $(\Delta_\psi \hat{S}_y)^2$ im Zustand $|\psi\rangle = |S_z^+\rangle$. Überprüfen Sie, ob die Unbestimmtheitsrelation mit $\hat{A} = \hat{S}_x$ und $\hat{B} = \hat{S}_y$ erfüllt ist.

ii. Führen Sie die gleiche Überprüfung für $\hat{A} = \hat{S}_x$ und $\hat{B} = \hat{S}_y$ und den Zustand $|\psi\rangle = |S_x^+\rangle$ durch.

27. Spinpräzession in einem festen Magnetfeld

Das magnetische Dipolmoment $\hat{\vec{\mu}}$ und der Spin-Operator $\hat{\vec{S}}$ eines Teilchens mit dem Spin $\frac{1}{2}$ seien verbunden durch

$$\hat{\vec{\mu}} = \gamma \hat{\vec{S}},$$

wobei γ das sog. *gyromagnetische Verhältnis* ist.

Wenn das Teilchen sich in einem konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ entlang der z-Achse befindet, lautet dessen Hamilton-Operator[1]

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma B_0 \hat{S}_z. \tag{1}$$

Wie in der Vorlesung werden die Eigenzustände zum Operator $\hat{S}_z$ mit $|S_z^+\rangle$, $|S_z^-\rangle$ bezeichnet.

i. Sei $|\psi(t)\rangle$ der Zustandsvektor des Teilchens. Bei $t = 0$ gilt $|\psi(0)\rangle = \alpha|S_z^+\rangle + \beta|S_z^-\rangle$, wobei α und β zwei komplexe Zahlen sind. Zeigen Sie, dass zu einem späteren Zeitpunkt t der Zustandsvektor durch

$$|\psi(t)\rangle = \alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t/2}|S_z^+\rangle + \beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t/2}|S_z^-\rangle \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{B_0}{\gamma} \tag{2}$$

gegeben ist. ω_0 heißt *Larmor-Frequenz*.

ii. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$ des magnetischen Dipolmoments im Zustand $|\psi(t)\rangle$ durch

$$\langle\hat{\mu}_x\rangle = 2\mu\,\mathrm{Re}\,(\alpha^*\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle\hat{\mu}_y\rangle = 2\mu\,\mathrm{Im}\,(\alpha^*\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}), \qquad \langle\hat{\mu}_z\rangle = \mu\,(|\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

mit $\mu \equiv \gamma\hbar/2$ gegeben ist. Warum ist $\langle\hat{\mu}_z\rangle$ zeitunabhängig? Schreiben Sie die x- bzw. y-Komponente mithilfe der Amplitude C und der Phase ϕ der komplexen Zahl $\mu_0\, \alpha^*\beta$ um. Was für eine Bewegung hat die Projektion von $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$ auf die (x, y)-Ebene? Was für eine Bewegung hat $\langle\hat{\vec{\mu}}\rangle$?

28. Bestimmung der Larmor-Frequenz

Das System sei das gleiche wie in Aufgabe **27.** Neben dem festen Magnetfeld $\vec{B}_0$ entlang der z-Achse wird ein zweites (schwächeres) Magnetfeld $\vec{B}_1$ eingeführt, das in der (x, y)-Ebene mit der Kreisfrequenz ω rotiert; somit lautet nun der Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)\right) = -\gamma B_0 \hat{S}_z - \gamma B_1 \cos(\omega t)\, \hat{S}_x - \gamma B_1 \sin(\omega t)\, \hat{S}_y. \tag{3}$$

i. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung für den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|S_z^+\rangle + c_-(t)|S_z^-\rangle$ zu den folgenden gekoppelten Differentialgleichungen führt:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}c_+}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_0}{2}\, c_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} c_-(t) \\ \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}c_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} c_+(t) - \dfrac{\omega_0}{2}\, c_-(t), \end{cases} \quad \text{mit} \quad \omega_0 \equiv -\frac{B_0}{\gamma} \text{ und } \omega_1 \equiv -\frac{B_1}{\gamma}. \tag{4}$$

[1] Die Spin- und Orts- bzw. Impulsfreiheitsgrade des Teilchens sind unabhängig voneinander, sodass wir nur den Spin-Anteil des Hamilton-Operators in Betracht ziehen können.

ii. Überprüfen Sie, dass das Ersetzen der Funktionen $c_\pm(t)$ durch $b_\pm(t) \equiv \exp(\pm i\omega t/2)\, c_\pm(t)$ das einfachere System

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}b_+}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega-\omega_0}{2}\,b_+(t) + \dfrac{\omega_1}{2}\,b_-(t) \\ \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{d}b_-}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega_1}{2}\,b_+(t) + \dfrac{\omega-\omega_0}{2}\,b_-(t) \end{cases}$$

ergibt. Prüfen Sie, dass dies impliziert

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_\pm}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv (\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2. \tag{5}$$

iii. Der Spin sei zu $t = 0$ im Zustand $|S_z^+\rangle$, was $b_-(0) = c_-(0) = 0$ entspricht. Was sind die normierten Lösungen von Gl. (5)? Erklären Sie, warum die Wahrscheinlichkeit, den Wert $-\hbar/2$ bei einer Messung von $\hat{S}_z$ zum Zeit t zu finden, durch

$$\mathcal{P}_{+\to-}(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

gegeben ist. Diskutieren Sie dieses Ergebnis für verschiedene Werte von ω: Warum erlaubt die Messung der Wahrscheinlichkeit des $|S_z^+\rangle \to |S_z^-\rangle$-Übergangs eine präzise Bestimmung[2] der Larmor-Frequenz ω_0 und hierbei (bei bekanntem Magnetfeld B_0) des gyromagnetischen Faktors γ?

*29. System mit einem dreidimensionalen Hilbert-Raum

Der Hamilton-Operator eines Systems sei durch

$$\hat{H} \cong \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$ gegeben. Zwei weitere Observablen des Systems seien durch

$$\hat{A} \cong \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{B} \cong \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ definiert.

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände zu $\hat{H}$, $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

ii. Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle \cong \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

wobei $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$. Welche Energiewerte kann das System im Zustand $|\psi(t)\rangle$ annehmen und was sind deren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten? Beantworten Sie die gleichen Fragen für die Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

[2] Die Idee dieser Messmethode geht auf Isidor Rabi zurück.

Präsenzübung Nr.7

P10. Exponential eines Operators

Sei $\hat{A}$ ein Operator. Wie ist das Exponential $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{A}}$ definiert? Wenden Sie vertrauensvoll (und kühn!) diese Definition auf den auf (beliebig oft diffenzierbare) Funktionen $f(t)$ wirkenden Differentialoperator

$$\hat{\mathcal{T}}_\tau \equiv -\mathrm{i}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

an. Erkennen Sie, was $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{T}}_\tau} f(t)$ sein könnte? Mit welchem Ihnen bekannten Operator sollte $\hat{\mathcal{T}}_\tau$ folglich zusammenhängen? Wie?

Übung Nr.8

30. Gauß'sches Wellenpaket

Die Wellenfunktion in Ortsdarstellung eines zeitunabhängigen eindimensionalen *Gauß'schen Wellenpakets* sei für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\langle x\,|\,\psi\rangle \equiv \psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}}\exp\!\left(\mathrm{i}kx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei $\sigma > 0$.

Überprüfen Sie, ob der Zustandsvektor $|\psi\rangle$ normiert ist. Bestimmen Sie die Erwartungswerte im Zustand $|\psi\rangle$ der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$ und $\hat{p}^2$. Folgern Sie daraus das Produkt aus den Erwartungswerten der Varianzen $(\Delta\hat{x})^2$ und $(\Delta\hat{p})^2$.

Hinweis: Zur Erinnerung gelten $\langle x''\,|\,\hat{x}\,|\,x'\rangle = x'\delta(x''-x')$ und $\langle x''\,|\,\hat{p}\,|\,x'\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x')$.

31. Funktionen auf dem Intervall $[0,L]$ mit Randbedingung

Man betrachte die stetigen komplexwertigen Funktionen f auf dem Intervall $[0,L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Auf dem Intervall sei ebenfalls ein Funktionensystem gegeben:

$$\langle x\,|\,u_n\rangle \equiv u_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{für } n = 1,2,.... \tag{2}$$

i. Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\{|u_n\rangle\}$ ein Orthonormalsystem bilden.

ii. Wie gut kann man die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 2(L-x) & \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

durch die ersten N Funktionen $|u_n\rangle$ approximieren? Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar für $N = 1$, $N = 5$ und $N = 10$, z.B. mit Mathematica.

iii. Es liegt nahe, zu vermuten, dass die Funktionen $\{|u_n\rangle\}$ eine Basis im Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0,L]$ nach $\mathbb{C}$ mit $f(0) = f(L) = 0$ bilden. Wie könnte man das beweisen?

32. Orts- und Impulsoperatoren

Man betrachte den (Hilbert-)Raum der beliebig oft differenzierbaren und quadratintegrablen Funktionen f auf dem Intervall $[0,L]$, die an den Endpunkten verschwinden, d.h. $f(0) = f(L) = 0$.

Sind die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ auf diesem Raum hermitesch? Gehen Sie dabei von den folgenden Definitionen aus:

$$\langle f\,|\,\hat{x}\,|\,g\rangle \equiv \int_0^L [f(x)]^*\, x\, g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \langle f\,|\,\hat{p}\,|\,g\rangle \equiv \int_0^L [f(x)]^* \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

33. Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen

i. Verifizieren Sie durch direktes Einsetzen, dass die reellen Funktionen $\psi_1(t,x) = \mathcal{N}\sin(kx-\omega t)$ und $\psi_2(t,x) = \mathcal{N}\cos(kx-\omega t)$ *keine* Lösungen der Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen sind.

ii. Verifizieren Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(t,x) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} - \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}$ (mit $\mathcal{N} \in \mathbb{C}$) die freie Schrödinger-Gleichung löst, falls $\hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$ gilt. Zeigen Sie, dass $\psi(t,x) = 2\mathrm{i}\mathcal{N}\sin(kx)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. Was für eine Art Welle ist das?

*34. Wellenfunktion

Bestimmen Sie für ein eindimensionales System mit Wellenfunktion in Ortsdarstellung

$$\langle x\,|\,\psi\rangle \equiv \psi(x) = \frac{\mathcal{N}}{x^2+a^2} \qquad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

- die Normierungskonstante $\mathcal{N}$,
- die Erwartungswerte im Zustand $|\psi\rangle$ der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$ und $\hat{p}^2$,
- die Wellenfunktion in Impulsdarstellung $\psi(k)$.

Präsenzübung Nr.8

P11. Impulsoperator

Die Wirkung $\hat{p}_x|\psi\rangle$ des Impulsoperators $\hat{p}_x$ auf einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ lautet in der Sprache der Wellenfunktionen in Ortsdarstellung

$$\hat{p}_x|\psi\rangle \rightsquigarrow -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \text{mit } \psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle.$$

Sei $|p\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{p}_x$, d.h. $\hat{p}_x|p\rangle = p|p\rangle$ mit $p \in \mathbb{R}$.

i. Schreiben Sie die entsprechende Eigenwertgleichung für die assoziierte Wellenfunktionen in Ortsdarstellung $\psi_p(x) \equiv \langle x|p\rangle$ und lösen Sie diese Gleichung (die Normierung von ψ_p wird nicht gefragt).

ii. Die Wellenfunktion beschreibt ein Teilchen, das in einer eindimensionalen *periodischen* Welt lebt (z.B. auf einem Kreis), so dass $\psi(x) = \psi(x+L)$ für alle x gilt, wobei L eine positive reelle Zahl ist. Normieren Sie die Eigenfunktion aus **i.** und geben Sie das Spektrum von $\hat{p}_x$ an.

Übung Nr.9

35. Schrödinger-Gleichung mit δ-Potential

Bestimmen Sie die stationären Lösungen der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für das Potential

$$V(x) = -\Omega\delta(x) \quad \text{mit } \Omega > 0. \tag{1}$$

Wie viele gebundene Zustände gibt es? Wie groß ist die zugehörige (Bindungs)Energie?

Hinweis: Da das Potential $\delta(x)$ enthält, ist $\psi(x)$ zwar stetig bei $x = 0$, $\psi'(x)$ jedoch nicht mehr. Die Anschlussbedingung für ψ' erhalten Sie dann, indem Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung über $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ (mit $\epsilon > 0$) integrieren und anschließend den Limes $\epsilon \to 0$ durchführen.

36. Schrödinger-Gleichung mit Doppel-δ-Potential

Bestimmen Sie die Energien der gebundenen Zustände im Potential

$$V(x) = -\Omega\big[\delta(x+a) + \delta(x-a)\big] \quad \text{mit } a, \Omega > 0, \tag{2}$$

was ein (sehr) grobes Modell für ein zweiatomiges Molekül darstellen könnte.

37. Streuung am δ-Potential

Betrachten Sie das Potential (1), aber jetzt mit $E = \hbar^2k^2/2m > 0$. Sei weiterhin $\Omega \equiv \hbar^2\kappa/m$. Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T für die Streuung an diesem Potential.

38. Schrödinger-Gleichung mit $1/\cosh^2$-Potential

Ein Teilchen mit Masse m befinde sich im Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2a^2}{m}\frac{1}{[\cosh(ax)]^2} \quad \text{mit } a > 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass das Potential einen Bindungszustand mit der Wellenfunktion $\psi_0(x) = A/\cosh(ax)$ hat. Finden Sie dessen Energie E_0, normieren Sie ψ_0 und skizzieren Sie diese Lösung.

*39. Schrödinger-Gleichung mit $1/\cosh^2$-Potential (2)

i. Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Potential (3) für positive Energien $E > 0$.

Dabei können Sie z.B. wie folgt vorgehen: per Ansatz $\psi(x) = \varphi(\tanh(ax))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit $k \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$ verschaffen Sie sich eine Differentialgleichung für $\varphi(t)$ in der Variablen $t \equiv \tanh(ax)$. Mit Potenzreihenansatz für $\varphi(t)$ und Abbruchbedingung (d.h. die Potenzreihe für $\varphi(t)$ soll nur endlich viele Terme enthalten) erhalten Sie dann eine elementare Lösung.]

ii. Wie verhält sich Ihre Lösung aus **i.** bei $x \to -\infty$? Was bedeutet das für Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Streuung an diesem Potential?

Präsenzübung Nr.9

Da der heutige Zettel ziemlich lang war, wird diese Präsenzübung kurz sein.

P12. Wissensfragen

Geben Sie die Schrödinger-Wellengleichung an. Was nennt man „stationäre Schrödinger-Gleichung“? Was bestimmt man mit deren Hilfe? Wie erhält man, ausgehend von einer Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?

Die z-Komponente des Spins wird an einem Ensemble von „nicht-präparierten“ Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen gemessen: welche Messwerte findet man? mit welcher Häufigkeit treten sie auf?

Wie ist der Zeitentwicklungsoperator definiert? Welcher Gleichung genügt er?

Wie lautet die allgemeine Unbestimmtheitsrelation? Erläutern Sie die vorkommenden Größen.

Übung Nr.10

40. Tunneleffekt durch eine rechteckige Potentialbarriere

Ziel dieser Aufgabe ist, die Streuzustände der stationären eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m im Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{1}$$

zu untersuchen, insbesondere die stationäre Lösung mit Energie $0 < E < V_0$, die einem aus $-\infty$ einfallenden Teilchen(strahl) entspricht. Seien $k > 0$ und $k' > 0$ durch

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad , \qquad V_0 - E \equiv \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \tag{2}$$

definiert.

i. Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten T für die Streuung an dieser Potentialbarriere.

ii. Überzeugen Sie sich, dass die Bedingung $k'L \gg 1$ in den folgenden Situationen erfüllt ist: a) im „klassischen Limes“ $\hbar \to 0$; b) für eine große Masse $m \to \infty$; c) im Fall einer hohen Potentialbarriere $V_0 - E \to \infty$; d) für eine breite Potentialbarriere $L \to \infty$.

Zeigen Sie, dass für $k'L \gg 1$ der Koeffizient T „exponential klein“ wird, und zwar

$$T \simeq \frac{16k^2k'^2}{(k^2 + k'^2)^2}\,\mathrm{e}^{-2k'L}. \tag{3}$$

41. Harmonischer Oszillator (1)

Die Wellenfunktion $\psi(t, x)$ eines Teilchens im Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ sei zur Zeit $t = 0$ durch

$$\psi(0, x) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)] \tag{4}$$

gegeben, wobei die ψ_n die in der Vorlesung gegebenen Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung für diesen Oszillator sind.

i. Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

ii. Bestimmen Sie $\psi(t, x)$ und $|\psi(t, x)|^2$.

iii. Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ als Funktionen der Zeit. Was erhalten Sie, wenn Sie in $\psi(0, x)$ die Funktion ψ_1 durch ψ_2 ersetzen?

42. Hermitesche Polynome

Die Hermiteschen Polynomen lassen sich aus der sog. *Rodrigues-Formel*[1]

$$H_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big) \tag{5}$$

für $n \geq 0$ berechnen.

i. Benutzen Sie die Formel, um die Polynome mit $n = 0, 1, 2, 3$ zu berechnen — das Ergebnis sollte mit den in der Vorlesungen angegebenen Ausdrücken übereinstimmen! Können Sie argumentieren, warum die Formel (5) für jede natürliche Zahl n ein Polynom vom Grad n definiert?

[1] Die auf der wikipedia.de-Seite (vom 12. Juni 2017) unter der Bezeichnung „Physiker-Konvention“ angegebene Formel ist eigentlich eher die „Statistiker-Konvention“, vgl. die englischsprachige Seite...

ii. Überprüfen Sie, dass die Rodrigues-Formel eine Lösung der Hermiteschen Differentialgleichung

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \tag{6}$$

gibt.

iii. Zeigen Sie, dass aus der Rodrigues-Formel die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{7}$$

folgt, mit deren Hilfe — und den Ausgangspunkten $H_0(x) = 1$ und $H_{-1}(x) =$ Konstante — sich die Polynome auch berechnen lassen: geben Sie bitte $H_4(x)$ an!

iv. $H_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n, so dass dessen Ableitung $H'_n(x)$ vom Grad $n-1$ ist. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{8}$$

gilt.

*43. Neutronen im Gravitationsfeld

Die Zeitentwicklung eines Teilchens (Masse m), das im Gravitationsfeld $-g\,\vec{e}_z$ der Erde fällt und am Boden reflektiert wird, kann mit einem Potential der folgenden Form beschrieben werden:

$$V(z) = \begin{cases} mgz & \text{für } z \geq 0 \\ \infty & \text{für } z < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Sei $z_0 \equiv \left(\dfrac{\hbar^2}{2m^2 g}\right)^{1/3}$ eine typische Längenskala des Problems und $E_0 \equiv mgz_0$ die zugehörige Energieskala.

i. Welche Randbedingung soll bei $z = 0$ erfüllt werden? Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der stationären Schrödinger-Gleichung für das Potential (9).

Hinweis: Dabei kann die *Airy-Funktion* $\mathrm{Ai}(x)$, Lösung der Differentialgleichung $y''(x) - xy(x) = 0$ mit der Bedingung $y(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, nützlich sein.

ii. Stellen Sie die niedrigsten fünf Wellenfunktionen graphisch dar. (In Mathematica heißt die Airy-Funktion `AiryAi`, ihre Nullstellen `AiryAiZero`).

iii. Experimente wurden mit kalten Neutronen (Masse $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg $= 939,6$ MeV$/c^2$) am Laue–Langevin-Institut in Grenoble durchgeführt (qBOUNCE-Experiment). Welche Zahlenwerte (in Pikoelektronenvolt — peV!) nehmen dann die ersten fünf Energie-Eigenwerte an?

Präsenzübung Nr.10

P13. Kommutator von Funktion von Operatoren

Seien $\hat{x}$ und $\hat{p}$ die Orts- und Impulsoperatoren, deren Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathbb{1}}$ lautet.

i. Zeigen Sie, dass $[\hat{x}^n, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar n \hat{x}^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(Daraus kann man folgern, dass für eine beinahe beliebige Funktion $[f(\hat{x}), \hat{p}]$ gilt, denn f kann beliebig genau durch ein Polynom approximiert werden.)

ii. Schlagen Sie eine Formel für den Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}^n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ vor. Können Sie sie beweisen?

Übung Nr.11

44. Harmonischer Oszillator (2)

i. Frischen Sie Ihre Kenntnisse über das „Heisenberg-Bild“ auf. Zeigen Sie insbesondere, dass im Fall eines zeitunabhängigen Hamilton-Operators $\hat{H}$ die Heisenberg-Bild- und Schrödinger-Bild-Operatoren $\hat{H}_{\rm H}$ und $\hat{H}$ gleich sind. Berechnen Sie den Kommutator $\big[\hat{x}_{\rm H}(t), \hat{p}_{\rm H}(t)\big]$.

ii. Betrachten Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{{\rm d}\hat{x}_{\rm H}(t)}{{\rm d}t} = \frac{1}{{\rm i}\hbar}\big[\hat{x}_{\rm H}(t), \hat{H}_{\rm H}\big] \quad \text{und} \quad \frac{{\rm d}\hat{p}_{\rm H}(t)}{{\rm d}t} = \frac{1}{{\rm i}\hbar}\big[\hat{p}_{\rm H}(t), \hat{H}_{\rm H}\big], \tag{1}$$

wobei $\hat{H}_{\rm H} = \hat{H}$ der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist. Ausgehend von den Tatsache, dass sich $\hat{H}_{\rm H}$ durch $\hat{x}_{\rm H}$, $\hat{p}_{\rm H}$ statt $\hat{x}$, $\hat{p}$ ausdrücken lässt, bestimmen Sie direkt die Lösungen für $\hat{x}_{\rm H}(t)$ und $\hat{p}_{\rm H}(t)$.

Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Die drei folgenden Aufgaben befassen sich mit den sogenannten kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ des harmonischen Oszillators: diese sind die Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2}$$

mit einem komplexen Eigenwert α.

45. Unbestimmtheitsrelation

i. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Benutzen Sie dabei die Eigenschaften der Auf- und Absteige-Operatoren.

ii. Berechnen Sie die Varianzen $\big\langle(\Delta\hat{x})^2\big\rangle$ und $\big\langle(\Delta\hat{p})^2\big\rangle$ sowie deren Produkt (und dessen Quadratwurzel).

46. Kohärente Zustände in der Energiebasis

Wie jeder Zustandsvektor lässt sich auch $|\alpha\rangle$ nach Energie-Eigenkets entwickeln:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle. \tag{3}$$

i. Zeigen Sie, dass für die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0 \tag{4}$$

gilt.

ii. Bestimmen Sie c_0 so, dass $|\alpha\rangle$ auf 1 normiert ist.

47. Zeitentwicklung

Zeigen Sie, dass kohärente Zustände auch unter Zeitentwicklung kohärente Zustände bleiben, aber dass sich der Eigenwert von $\hat{a}$ gemäß

$$\alpha(t) = \alpha(0)\,{\rm e}^{{\rm i}\omega t} \tag{5}$$

mit der Zeit ändert.

*48. Quantenmechanischer Virialsatz

Ein eindimensionales System sei durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad \text{mit} \quad V(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^n \tag{6}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \neq -1$ beschrieben.

i. Berechnen Sie den Kommutator $\big[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\big]$.
Dabei dürfen Sie das folgende Ergebnis benutzen: der Kommutator von einer (beinahe beliebigen) Funktion f des Ortsoperators mit dem Impulsoperator ist $\big[f(\hat{x}), \hat{p}\big] = \mathrm{i}\hbar f'(\hat{x})$.

ii. Sei $|\phi_k\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$. Indem Sie den Erwartungswert des Kommutators $\big[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}\big]$ im Zustand $|\phi_k\rangle$ berechnen, zeigen Sie die Beziehung

$$2\langle\phi_k|\hat{T}|\phi_k\rangle = n\langle\phi_k|V(\hat{x})|\phi_k\rangle, \tag{7}$$

wobei $\hat{T} \equiv \hat{p}^2/2m$. Prüfen Sie diese Relation für den Fall des harmonischen Operators.

Präsenzübung Nr.11

P14. Harmonischer Oszillator

Zur Erinnerung lautet der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right) \quad \text{mit} \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \ , \ \hat{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\mathrm{i}} .$$

Die Energie-Eigenzustände seien mit $\{|n\rangle\}$ bezeichnet.

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle n | \hat{x} | n \rangle$, $\langle n | \hat{p} | n \rangle$, $\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle$, $\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle$. Wie lautet die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Zustand $|n\rangle$?

Hinweis: $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \cdots .$

Übung Nr.12

49. Bahndrehimpulsoperator (1)

Die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators lauten $\hat{L}_i \equiv [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0}$ und $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathbb{1}}$, verifizieren Sie die Gültigkeit der Vertauschungsrelationen

i. $[\hat{L}_i, \hat{x}_j] = \mathrm{i}\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{x}_k$ und $[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{p}_k \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

ii. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

iii. $[\hat{L}_i, \hat{\vec{r}}^{\,2}] = [\hat{L}_i, \hat{\vec{p}}^{\,2}] = \hat{0} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

iv. Der Hamilton-Operator eines Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + V(\hat{\vec{r}}). \tag{1}$$

Unter welchen Bedingungen über das Potential $V(\vec{r})$ ist $\hat{\vec{L}}$ eine Konstante der Bewegung?

50. Verallgemeinerter Drehimpulsoperator (1)

Seien $\hat{J}_i$ mit $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = x, y, z$) die Komponenten eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$. Zeigen Sie anhand der *Lie-Algebra-Beziehung* (der Drehgruppe) $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \mathrm{i}\hbar \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Vertauschungsrelation

$$[\hat{\vec{J}}^{\,2}, \hat{J}_i] = \hat{0} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \tag{2}$$

51. Verallgemeinerter Drehimpulsoperator (2)

Seien $\hat{J}_i$ mit $i = 1, 2, 3$ (bzw. $i = x, y, z$) die Komponenten eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$. Das System sei im gemeinsamen Eigenzustand $|j, m\rangle$ des Satzes $\{\hat{\vec{J}}^{\,2}, \hat{J}_z\}$.

i. Zeigen Sie, dass $\langle \hat{J}_i \rangle \equiv \langle m, j\,|\,\hat{J}_i\,|\,m, j\rangle = 0$ für $i = x$ oder y.

ii. Zeigen Sie, dass die Varianz von $\hat{J}_i$ für $i = x$ oder y durch

$$\langle m, j\,|\big(\hat{J}_i - \langle \hat{J}_i \rangle\big)^2|\,m, j\rangle = \frac{j(j+1) - m^2}{2}\hbar^2 \tag{3}$$

gegeben ist.

52. Bahndrehimpulsoperator (2)

Betrachten Sie $\hat{\vec{L}} \equiv -\mathrm{i}\hbar\,\vec{r} \times \vec{\nabla}$ in der Ortsdarstellung mit Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

i. Leiten Sie die folgenden Darstellungen der kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulses her:

$$\hat{L}_x = -\mathrm{i}\hbar\left(-\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad , \quad \hat{L}_y = -\mathrm{i}\hbar\left(\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad , \quad \hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{4}$$

Folgern Sie daraus die Darstellung der Operatoren $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$.

ii. In der Vorlesung wurden die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ für $\ell = 2$ und $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gegeben. Prüfen Sie die Beziehungen

$$\hat{L}_+ Y_{\ell\ell}(\theta, \varphi) = 0 \quad , \quad \hat{L}_- Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,\hbar\, Y_{\ell m-1}(\theta, \varphi). \tag{5}$$

iii. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Lie-Algebra-Beziehung $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_z$.

*53. Warum ℓ und m beim Bahndrehimpulsoperator ganzzahlig sind

Es sei $\hat{a}_j \equiv \dfrac{\hat{x}_j + \mathrm{i}\hat{p}_j}{\sqrt{2\hbar}}$ für $j = 1, 2$ und damit

$$\hat{A} \equiv \frac{\hat{a}_1 + \mathrm{i}\hat{a}_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \hat{B} \equiv \frac{\hat{a}_1 - \mathrm{i}\hat{a}_2}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

i. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{a}_1, \hat{a}_2]$, $[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger]$, $[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2]$, $[\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger]$ und $[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger]$ (für $j = 1, 2$), und zeigen Sie, dass gilt:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger] = \hat{0} \quad , \quad [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = [\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\hat{A}, \hat{B}^\dagger] = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}] = \hat{0}. \tag{7}$$

ii. Vergleichen Sie die Vertauschungsrelationen in Gl. (7) mit denen für die Auf- und Absteigeoperatoren für harmonische Oszillatoren. Was schließen Sie daraus für das Spektrum der Operatoren $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ und $\hat{B}^\dagger\hat{B}$?

iii. Drücken Sie die 3. Komponente des Bahndrehimpulsoperators durch die $\hat{a}_j$ und $\hat{a}_j^\dagger$ aus, und zeigen Sie, dass $\hat{L}_3 = \hbar(\hat{B}^\dagger\hat{B} - \hat{A}^\dagger\hat{A})$ ist.

iv. Warum ist m also ganzzahlig? und ℓ?

Präsenzübung Nr.12

P15. Auf- und Absteigeoperatoren

Seien $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ Komponenten eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$ und $\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm \mathrm{i}\hat{J}_y$ die üblichen Auf- und Absteigeoperatoren. Leiten Sie aus der Vertauschungsrelation von $\hat{J}_x$ und $\hat{J}_y$ den Kommutator $\left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right]$ ab.

P16. Kommutierende Operatoren

Beweisen Sie die folgende Aussage: damit ein Operator $\hat{A}$ mit allen möglichen Funktionen eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$ kommutiert, reicht es aus, wenn $\hat{A}$ mit zwei der Komponenten kommutiert.

Übung Nr.13

54. Wasserstoffatom

i. Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius a den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton-Abstandes im Grundzustand des Wasserstoffatoms darstellt, d.h. dass $r^2 R_{1,0}(r)^2$ für $r = a$ maximal wird.

Hinweis: $R_{1,0}(r) = \dfrac{2}{a^{3/2}} \mathrm{e}^{-r/a}$.

ii. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ und $\langle 1/r \rangle$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch a aus.

iii. Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{r} + \frac{2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \tag{1}$$

mit $e^2 \equiv q_e^2/4\pi\epsilon_0$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den bekannten Energie-Eigenwerten E_n des Wasserstoffatoms. Wie ist die Beziehung $n > \ell$ in dieser Hinsicht „verständlich“?

55. Rydberg-Atome mit maximalem Bahndrehimpuls

Die normierten Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms mit maximaler Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = n - 1$ sind der Form $\psi_{n,n-1,m_\ell}(\vec{r}) = R_{n,n-1}(r) Y_{n-1,m_\ell}(\theta, \varphi)$ mit

$$R_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!\, a}} \left(\frac{2r}{na}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{-r/na}}{r} \tag{2}$$

mit dem Bohrschen Radius a.

Bestimmen sie den wahrscheinlichsten Wert r_{max} von r im Zustand $\psi_{n,n-1,m_\ell}$. Vergleichen Sie r_{max} mit dem Erwartungswert $\langle r \rangle$ in diesem Zustand.

56. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der isotrope dreidimensionale harmonische Oszillator wird durch das Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ beschrieben.

i. Machen Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten. Zeigen Sie, dass man so die Gleichungen für 3 entkoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren erhält. Wie lautet also das Energie-Spektrum des dreidimensionalen Oszillators?

Hinweis: $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$.

ii. Wie lautet der Entartungsgrad von E_n?

iii. Wegen der Rotationssymmetrie des Potentials haben wir es hier mit einem Zentralkraftproblem zu tun, das sich mit der gleichen Methode wie das Wasserstoffatom (siehe Vorlesung vom 3. Juli) behandeln lässt.

Machen Sie den Potenzreihen-Ansatz („Frobenius-Methode“, siehe Vorlesung zum eindimensionalen Oszillator) zum Lösen der Radialgleichung, leiten sie die Rekursionsrelation für die Koeffizienten her, und bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit **i.** und **ii.**.

57. Vertauschungsrelationen und Quantenzahlen

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

i. Falls $\left[\hat{H}, \hat{\vec{L}}\right] = \hat{0}$ sind die Energie-Eigenwerte unabhängig von der magnetischen Quantenzahl m_ℓ, d.h. von den Eigenwerten einer der drei Komponenten von $\hat{\vec{L}}$.

ii. Falls $\left[\hat{H}, \hat{\vec{L}}^{\,2}\right] = \hat{0}$ sind die Energieniveaus unabhängig von der Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ.

*58. Anisotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den anisotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2\hat{z}^2 \tag{3}$$

mit $\omega_x \equiv \omega(1 + \frac{1}{3}\delta)$ und $\omega_z \equiv \omega(1 - \frac{2}{3}\delta)$ wobei $\omega > 0$ und $0 \leq \delta < \frac{3}{2}\omega$. Geben Sie die Eigenwerte mit ihrem Entartungsgrad an.

Präsenzübung Nr.13

P17. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

i. Betrachten Sie den isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega\hat{y}^2.$$

Geben Sie die Energieeigenwerte $\{E_n\}$ an. Wie lautet der Entartungsgrad von E_n?

ii. Gleiche Fragen für das System mit Hamilton-Operator $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}_x^2}{2m} + \dfrac{\hat{p}_y^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 + m\omega\hat{y}^2$.

Übung Nr.14

59. Kopplung zweier Isospin-1-Teilchen

Als „Isospin“ bezeichnen Teilchenphysiker eine näherungsweise Symmetrie einiger Teilchen, die sich mathematisch wie Spin-Zustände behandeln lassen. Somit verhalten sich die drei „Pionen“ als die drei Bestandteile eines (Iso-)Spin-1-Tripletts $\{|j=1,m\rangle\}$ mit $\pi^+ \equiv |1,1\rangle$, $\pi^0 \equiv |1,0\rangle$ und $\pi^- \equiv |1,-1\rangle$.

Betrachten Sie Zustände mit zwei Pionen, und zwar $|\pi^+\pi^-\rangle$, $|\pi^-\pi^+\rangle$, $|\pi^0\pi^0\rangle$, $|\pi^+\pi^0\rangle$ sowie $|\pi^0\pi^+\rangle$. Schreiben Sie diese Zustände als Linearkombinationen der Zustände $|2,m\rangle$, $|1,m\rangle$ und $|0,0\rangle$.

Hinweis: Unten `http://pdg.lbl.gov/2017/reviews/rpp2016-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf` können Sie eine Tabelle von Clebsch–Gordan-Koeffizienten finden.

60. Kopplung zweier Spin-1-Teilchen

Der Hamilton-Operator eines Systems aus zwei Spin-1-Teilchen mit Spins $\hat{\vec{S}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{S}}^{(2)}$ sei

$$\hat{H} = A\,\hat{\mathbb{1}} + B\,\hat{\vec{S}}^{(1)}\cdot\hat{\vec{S}}^{(2)} + C\big(\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}\big), \tag{1}$$

mit reellen Konstanten A, B, C. Finden Sie die Energieeigenwerte des Systems. Gibt es Entartung?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst einen Satz von Operatoren, die mit $\hat{H}$ kommutieren.

61. Harmonischer Oszillator unter linearen Störung

Zum Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators wird eine lineare Störung $\hat{W}$ addiert, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, mit

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad , \quad \hat{W} = m\omega^2\alpha\hat{x} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

i. Berechnen Sie die Korrektur zu den Energien der Eigenzustände des harmonischen Oszillators in erster Ordnung der Störungsentwicklung.

Hinweis: Sie können entweder mit den in der Vorlesung angegebenen Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators arbeiten — dann ist die Rekursionsformel (7) der Aufgabe **42.** nützlich —, oder Auf- und Absteigeoperatoren benutzen und $\hat{x}$ dadurch ausdrücken.

ii. Eigentlich ist das Problem exakt lösbar! Geben Sie die exakten Energieeigenwerte an und vergleichen Sie sie mit dem Resultat aus **i.**.

*62. Quantenmechanik des starren Körpers

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2}{2I_x} + \frac{\hat{L}_y^2}{2I_y} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}, \tag{3}$$

wobei die $\hat{L}_j$ Bahndrehimpulsoperatoren und die I_j Konstanten sind. Der Operator $\hat{H}$ beschreibt übrigens die Bewegung eines freien starren Körpers mit den Hauptträgheitsmomenten I_j. Unter welchen Umständen ist $\langle\hat{L}_x\rangle$ zeitunabhängig?

Präsenzübung Nr.14

P18. Harmonischer Oszillator unter linearen Störung

Im Aufgabe **61.** haben Sie gefunden, dass die erste Ordnung der Störungsentwicklung für den linear gestörten harmonischen Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + m\omega^2\alpha\hat{x} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Null ist. Berechnen Sie jetzt die Energiekorrektur zur zweiten Ordnung, sowohl für den Grundzustand als auch für die angeregten Zustände.

Hinweis: $\epsilon_n^{(2)} = \sum_{n' \neq n} \frac{\left|\langle n'|\hat{W}|n\rangle\right|^2}{E_{0,n} - E_{0,n'}}$ und $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$.

Übung Nr.15: Probeklausur

In der echten Klausur werden Sie ca. 2,5 Stunden haben und über keine Hilfsmittel verfügen.
(Dazu werden die Wissensfragen Teil der „normalen“ Aufgaben sein.)

1. Wissensfragen

i. Spezielle Relativitätstheorie

a) Wie lautet die Transformation der Raumzeitkoordinaten für einen Lorentz-Boost in z-Richtung? Definieren Sie die dabei auftretenden Größen.

b) Ein Teilchen mit Masse m bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$. Geben Sie die Koordinaten p^μ dessen Viererimpulses sowie das Lorentz-Quadrat (Definition?) des letzteren an.

c) Wie ist das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes definiert? Wie kann der zugehörige Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dadurch ausgedrückt werden?

ii. Wellenmechanik

a) Geben Sie die zeitabhängige Schrödinger-Wellengleichung an.

b) Was nennt man „stationäre Schrödinger-Gleichung“? Was bestimmt man mit deren Hilfe?

c) Wie erhält man, ausgehend von einer Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?

iii. Harmonischer Oszillator

Geben Sie das Energiespektrum des eindimensionalen harmonischen Oszillators ($V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$) an.

iv. Spin-$\frac{1}{2}$-System

Die z-Komponente des Spins wird an einem Ensemble von „nicht-präparierten“ Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen gemessen: welche Messwerte findet man? mit welcher Häufigkeit treten sie auf?

v. Allgemeiner Formalismus der Quantenmechanik

a) Wie ist der Zeitentwicklungsoperator definiert? Welcher Gleichung genügt er?

b) Geben Sie den Kommutator von Komponenten $\hat{x}_i$ und $\hat{p}_j$ der Orts- und Impulsoperatoren an.

2. Teilchenzerfall

Ein ruhender Atomkern mit Masse $M = 5m$ zerplatze in drei gleiche Teile (je Masse m), deren 3-Impuls-Beträge $|\vec{p}_i|$ auch gleich sind. Geben Sie $|\vec{p}_i|$ an und skizzieren Sie die drei 3-Impulse.

3. Bewegung eines Teilchens in einer Raumdimension

Eine freie Teilchenwelle $A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ laufe von $x = -\infty$ kommend gegen das Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{\hbar^2 v_0}{2m}\delta(x + x_0) & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $x_0 > 0$, $v_0 > 0$, und m die Teilchenmasse ist.

i. Was sind passende Ansätze für die Wellenfunktion $\psi(x)$ in den Bereichen I ($x < -x_0$) und II ($-x_0 < x \leq 0$)? Geben Sie die aus der Schrödinger-Gleichung folgenden Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = -x_0$ an.

ii. Ein Teil der einlaufenden Welle wird im Bereich I reflektiert. Definieren Sie und bestimmen Sie den entsprechenden Reflexionskoeffizienten R.

4. Addition und Kopplung von Drehimpulsen

Seien $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den jeweiligen Spins $j_1 = 1$ und $j_2 = \frac{3}{2}$. Die anderen Freiheitsgrade (Bewegungszustand. . .) der Teilchen werden ignoriert.

i. Sei $\hat{\vec{J}} \equiv \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$ der Gesamtspin-Operator des aus den zwei Teilchen bestehenden Systems. Was sind die Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$?

ii. Der Hamilton-Operator des Systems sei $\hat{H} = g\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)}$ mit einer reellen Konstante g. Bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenwerte und geben Sie den Entartungsgrad der verschiedenen Energieniveaus an.

5. Stationäre Störungsrechnung

Die ungestörten, normierten Wellenfunktionen für ein Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \\ \infty & \text{außerhalb} \end{cases} \tag{2}$$

sind $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ für $0 < x < a$ und Null außerhalb.

i. Das System werde dadurch gestört, dass der Boden des Topfs um einen Betrag λV_0 angehoben wird, $\lambda \ll 1$. Bestimmen Sie die Korrekturen erster Ordnung (in λ) für die Energien.

ii. Jetzt wird nur der halbe Boden angehoben:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda V_0 & \text{für } 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{a}{2} < x < a \end{cases} \tag{3}$$

Geben Sie die Energiekorrektur erster Ordnung an.

Hinweis: $\frac{\partial}{\partial x}(x - \sin x \cos x) = 2 \sin^2 x$.