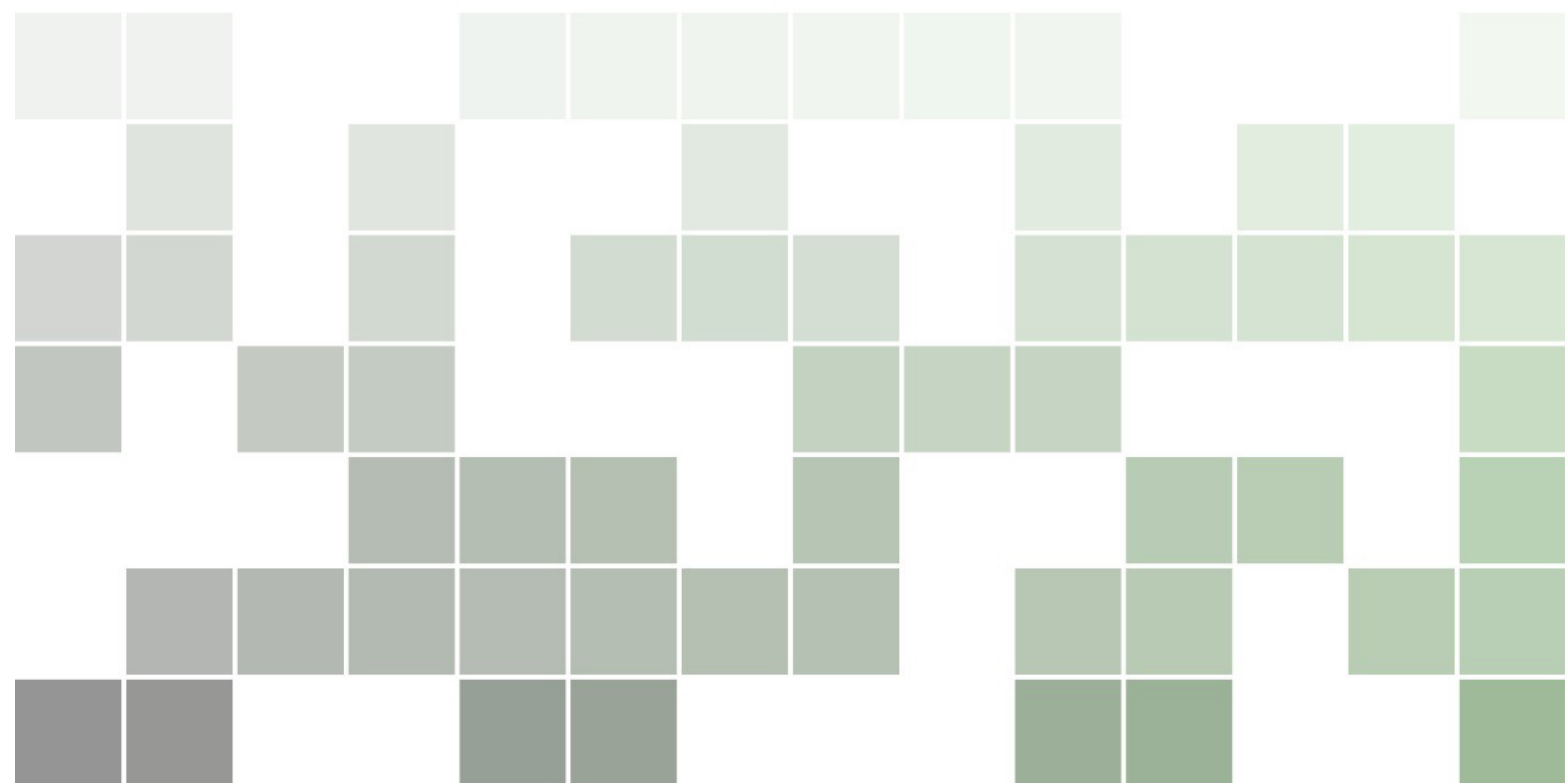


Spezielle Relativitätstheorie

Nicolas Borghini

Version vom 7. Mai 2017



Nicolas Borghini

Universität Bielefeld, Fakultät für Physik

Homepage: <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/>

Email: borghini at physik.uni-bielefeld.de

Inhaltsverzeichnis

I Relativistische Kinematik	1
I.1 Einsteinsche Postulate 1	
I.1.1 Motivation 1	
I.1.2 Einsteinsche Postulate 2	
I.2 Lorentz-Transformationen 3	
I.2.1 Raumzeit-Intervall, Linienelement 3	
I.2.2 Lorentz-Transformationen 4	
I.2.3 Minkowski-Raum 8	
I.2.4 Kinematische Effekte 12	
I.3 Vierervektoren und Vierertensoren 15	
I.3.1 Lorentz-Skalare 15	
I.3.2 Vierervektoren 15	
I.3.3 Vierertensoren 19	
I.3.4 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes 20	
Appendix zum Kapitel I22
I.A Beweis der Linearität von Lorentz-Transformationen 22	
II Relativistische Punktmechanik24
II.1 Bewegung eines freien relativistischen Teilchens 24	
II.1.1 Lagrange-Funktion und Wirkung eines freien Teilchens 24	
II.1.2 Impuls und Energie eines freien Teilchens 25	
II.2 Kovariante Formulierung des Grundgesetzes der Mechanik 27	
II.3 Mehrteilchensysteme 28	
III Relativistisch kovariante Formulierung der Elektrodynamik30
III.1 Wiederholung zur nicht-kovarianten Formulierung 30	
III.1.1 Dynamische Variablen 30	
III.1.2 Maxwell–Lorentz-Gleichungen 30	
III.1.3 Elektromagnetische Potentiale. Eichungen 32	
III.1.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes 33	
III.2 Lorentz-kovariante elektromagnetische Größen 33	
III.2.1 Elektromagnetischer Feldstärketensor 33	
III.2.2 Viererpotential 36	
III.2.3 Elektrischer Viererstrom 36	
III.2.4 Energieimpulstensor 37	
III.3 Relativistisch kovariante Formulierung der Grundgesetze 37	
III.3.1 Maxwell-Gleichungen 37	
III.3.2 Kontinuitätsgleichung 38	
III.3.3 Lorentz-Kraft und -Kraftdichte 38	
III.3.4 Energie- und Impulsbilanzgleichungen 39	
III.4 Weitere Resultate in relativistisch kovarianter Form 39	
III.4.1 Bewegungsgleichung für das Viererpotential 39	
III.4.2 Klassische Wellengleichung und ebene Wellen 39	
Literaturverzeichnis41

KAPITEL I

Relativistische Kinematik

Entsprechend der newtonschen Idee von einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit sind die Gleichungen der klassischen Mechanik invariant unter einer bestimmten Gruppe von Zeit- und Raumkoordinatentransformationen, und zwar unter den Transformationen, welche den Abstand zweier Raumpunkte $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ und den Zeitunterschied $t_2 - t_1$ separat invariant lassen. Dabei stellt sich aber heraus, dass diese Transformationen die Gesetze der Elektrodynamik nicht invariant lassen — insbesondere führen sie zu einer Abhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem, die experimentell nicht beobachtet wird. Um diesen Widerspruch zu lösen, sollen die Postulate, welche den Vorstellungen von Raum und Zeit zugrunde liegen, geändert werden (Abschn. I.1).

Die revidierten Postulate führen zu einer neuen Vorstellung von Raum und Zeit, die jetzt nicht mehr absolut sind. Stattdessen soll man eine vierdimensionale Raumzeit betrachten, in welcher der „relevante“ Abstand die Raum- und Zeitkoordinaten miteinander mischt. Dies lässt sich insbesondere an die Form der im Abschn. I.2 gefundenen Koordinatentransformationen zwischen den Systemen zweier Inertialbeobachter in gleichförmiger geradliniger Relativbewegung erkennen. Mit der neuen Vorstellung gehen einige merkwürdige Phänomene wie die Zeitdilatation oder die Längenkontraktion einher (§ I.2.4), deren experimentelle Beobachtung die nicht-intuitive Theorie glänzend bestätigt.

Schließlich befasst sich Abschn. I.3 mit den mathematischen Objekten, welche sich unter den gültigen Koordinatentransformationen der Raumzeit „korrekt“ transformieren, und daher für die Darstellung von physikalischen Größen bzw. für die Formulierung von relativistischen Gesetzen in Frage kommen.

I.1 Einsteinsche Postulate

I.1.1 Motivation

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts verfügten Physiker über zwei Theorien — Klassische Mechanik und Elektrodynamik —, die zwar separat sehr erfolgreich waren, sich aber nicht problemlos miteinander im Einklang bringen ließen.

- In der Klassischen Mechanik, wie sie zuerst durch Newton^(a) entwickelt wurde, wird der Begriff des *Inertialsystems* eingeführt: laut dem Galilei^(b)-Trägheitsprinzip bleibt der Bewegungszustand — Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung — eines Körpers relativ zu einem Inertialsystem unverändert, solange der Körper keiner Kraft unterliegt. Dann ist jedes Bezugssystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem gleichförmig und geradlinig bewegt, ebenfalls inertial; dagegen sind Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem beschleunigt bewegen, nicht-inertial. Somit sind die Koordinatentransformationen zwischen den zeitlichen und (kartesischen) räumlichen Koordinaten zweier Inertialsysteme die *Galilei-Transformationen*:

$$* \text{ räumliche Translationen } t \rightarrow t' = t, \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{b} \text{ mit } \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{I.1a})$$

$$* \text{ zeitliche Translationen } t \rightarrow t' = t - \tau, \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} \text{ mit } \tau \in \mathbb{R} \quad (\text{I.1b})$$

^(a)I. NEWTON, 1643–1727 ^(b)G. GALILEI, 1564–1642

$$* \text{ Drehungen } t \rightarrow t' = t, \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathcal{R}\vec{r} \text{ mit einer Drehmatrix } \mathcal{R} \quad (\text{I.1c})$$

$$* \text{ Galilei-Boosts } t \rightarrow t' = t, \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \text{ mit } \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{I.1d})$$

sowie deren Produkte, die zusammen die *Galilei-Gruppe* bilden.

Man prüft einfach nach, dass die Gesetze der klassischen Mechanik — insbesondere das zweite newtonsche Gesetz — in jedem Inertialsystem die gleiche Form annehmen. Entsprechend diesem sog. *Galileischen Relativitätsprinzip*⁽¹⁾ sind alle Inertialsysteme gleichwertig.

Schließlich folgt aus Gl. (I.1d) das klassische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten: bewegt sich ein Körper mit Geschwindigkeit \vec{v}' relativ zu einem Inertialsystem \mathcal{B}' , das sich selbst relativ zu einem anderen Inertialsystem \mathcal{B} mit der gleichförmigen Geschwindigkeit \vec{u} bewegt, so ist die Geschwindigkeit des Körpers bezüglich \mathcal{B} durch

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (\text{I.2})$$

gegeben.

- Die ganze Elektrodynamik, zumindest im Vakuum, ist in den Maxwell^(c)-Gleichungen enthalten.⁽²⁾ Aus denen folgert man leicht, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum von elektromagnetischen Wellen — insbesondere von Licht, das laut Arbeiten von Hertz^(d) ein elektromagnetisches Phänomen ist — denselben Wert (c) in allen Inertialsystemen annimmt. In der Tat zeigten die Interferenz-Experimente von Michelson^(e) und Morley^(f), dass die Lichtgeschwindigkeit parallel oder senkrecht zur (instantanen) Bewegungsrichtung der Erde um die Sonne gleich bleibt.

Diese theoretische Vorhersage sowie ihre experimentelle Bestätigung⁽³⁾ lassen sich aber offensichtlich nicht mit dem Additionsgesetz für Geschwindigkeiten (I.2) in Einklang bringen.

I.1.2 Einsteinsche Postulate

Um die theoretisch und experimentell gefundene Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit zu berücksichtigen hat Einstein^(g) (1905) zwei Postulate eingeführt [1], die zu einer neuen Kinematik führen und somit im Endeffekt die durch Newton postulierten Gesetze ungültig machen.

I.1.2a Erstes Postulat

Das erste dieser Postulate ist das einsteinsche *Relativitätsprinzip*:

$$\boxed{\text{Die Gesetze der Physik nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.}} \quad (\text{I.3})$$

Dabei handelt es sich um eine Erweiterung des oben erwähnten Galilei-Relativitätsprinzips, das aber nur für mechanische System galt. Mit seiner Verallgemeinerung meinte insbesondere Einstein, dass auch elektromagnetische Phänomene diesem Prinzip genügen sollen.

Bemerkung: Eine alternative Formulierung des Postulats besagt, dass kein physikalisches Experiment es erlaubt, zwischen Zustand der Ruhe und gleichförmiger geradliniger Bewegung zu unterscheiden.

⁽¹⁾... das eigentlich durch Newton formuliert wurde!

⁽²⁾Der Vollständigkeit halber werden die Grundgleichungen der klassischen Elektrodynamik im Absch. III.1 zusammengefasst.

⁽³⁾... vorausgesetzt, die Michelson–Morley-Experimente wirklich das Fortpflanzen von Licht im Vakuum messen, nicht in irgendeinem hypothetischen Medium — dem Äther —, wie damals vorgeschlagen wurde, um die Newton-Mechanik zu retten.

^(c)J. C. MAXWELL, 1831–1879 ^(d)H. HERTZ, 1857–1894 ^(e)A. MICHELSON, 1852–1931 ^(f)E. MORLEY, 1838–1923

^(g)A. EINSTEIN, 1879–1955

I.1.2b Zweites Postulat

Mit seinem zweiten Postulat entschied sich Einstein gegen die newtonschen Gesetze mit deren Invarianz unter Galilei-Transformationen, und legte mehr Wert auf die Maxwell-Gleichungen und deren experimentellen Bestätigungen, indem er die Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit als grundsätzlich erklärte:

$$\boxed{\text{Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich.}} \quad (\text{I.4})$$

Demzufolge kann das klassische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten nicht mehr gelten. Dies bedeutet wiederum, dass Galilei-Transformationen, insbesondere Galilei-Booster, nicht die richtigen Transformationen zwischen Inertialsystemen sind. Wegen dieses Prinzips muss also die ganze Kinematik neu geschrieben werden.

I.1.2c Zusätzliche Postulate

Neben den Postulaten (I.3), (I.4), die in Einsteins ursprünglicher Artikel explizit waren, liegen noch weitere Annahmen der Speziellen Relativität zugrunde.

Somit geht man davon aus, dass der Raum *homogen*, *isotrop* und *euklidisch* ist. Die letztere Eigenschaft bedeutet, dass die Gesetze der euklidischen Geometrie gelten: z.B. ist der Abstand zwischen zwei Punkten mit jeweiligen kartesischen Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) durch $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ gegeben; dabei gibt es solche Koordinatensysteme, die auf dem ganzen Raum gültig sind. Dann bedeutet die Homogenität, dass der Raum überall die gleichen Eigenschaften hat. Schließlich besagt die Isotropie, dass es im (leeren) Raum keine bevorzugte Richtung gibt.

I.2 Lorentz-Transformationen

In diesem Abschnitt sind \mathcal{B} und \mathcal{B}' zwei Inertialsysteme, während t und \vec{r} bzw. t' und \vec{r}' die Zeit und den Ortsvektor bezeichnen, die durch einen in \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' ruhenden Beobachter gemessen sind.

Nach der Definition des relevanten „Abstands“ in der Raumzeit (§ I.2.1) werden die Koordinatentransformationen untersucht, welche diesen Abstand invariant lassen (§ I.2.2). Nach der Darlegung einiger Eigenschaften der Raumzeit (§ I.2.3) befasst sich § I.2.4 mit einigen Effekten, die in der Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen auftreten.

I.2.1 Raumzeit-Intervall, Linienelement

Seien P_1 und P_2 zwei Punkte, zwischen denen Vakuum herrscht. Zu einem ersten Zeitpunkt wird Licht in P_1 emittiert. Für den Beobachter in \mathcal{B} geschieht dies zur Zeit t_1 bei der Position \vec{r}_1 ; für den Beobachter in \mathcal{B}' , zur Zeit t'_1 bei der Position \vec{r}'_1 . Das Licht wird zu einem späteren Zeitpunkt in P_2 detektiert, und zwar für den Beobachter in \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' zur Zeit t_2 bzw. t'_2 bei der Position \vec{r}_2 bzw. \vec{r}'_2 .

Laut dem zweiten einsteinschen Postulat muss die Vakuumlichtgeschwindigkeit gleich c für beide Beobachter sein, d.h.

$$\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{t_2 - t_1} \equiv \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = c \quad \text{und} \quad \frac{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|}{t'_2 - t'_1} \equiv \frac{|\Delta\vec{r}'|}{\Delta t'} = c$$

oder äquivalent $|\Delta\vec{r}| = c\Delta t$ und $|\Delta\vec{r}'| = c\Delta t'$, oder noch

$$(\Delta\vec{r})^2 = c^2\Delta t^2 \quad \text{und} \quad (\Delta\vec{r}')^2 = c^2\Delta t'^2.$$

Definition: Die Differenz

$$\boxed{\Delta s^2 \equiv -c^2\Delta t^2 + (\Delta\vec{r})^2} \quad (\text{I.5})$$

wird *Intervall* oder *Abstand* in der Raum-Zeit genannt.

Gemäß der obigen Diskussion muss dieses Intervall dasselbe — und zwar gleich Null — für beide Beobachter sein

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 = 0,$$

damit beide Inertialbeobachter dieselbe Lichtgeschwindigkeit im Vakuum messen.

Betrachtet man nun infinitesimal benachbarte Punkte P_1 und P_2 , und dementsprechend ein infinitesimales Zeitintervall für die Lichtpropagation, so kann man die Änderungen $\Delta\vec{r}$, Δt , usw. durch infinitesimale Variationen $d\vec{r}$, dt , usw. ersetzen. Dann wird das Intervall (I.5) zum *Linienelement*

$$ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2. \quad (\text{I.6})$$

Seien jetzt P_1, P_2 zwei beliebige Punkte derart, dass in beiden Orten zu gegebenen Zeitpunkten etwas passiert. Für den Beobachter in \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' findet das „erste“ Ereignis zur Zeit t_1 bzw. t'_1 statt, als sich der Punkt P_1 bei der Position \vec{r}_1 bzw. \vec{r}'_1 befindet. Wiederum sind die jeweiligen Zeit- und Ortskoordinaten des „zweiten“ Ereignisses $t_2 \equiv t_1 + \Delta t$ und $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$ bzw. $t'_2 \equiv t'_1 + \Delta t'$ und $\vec{r}'_2 \equiv \vec{r}'_1 + \Delta\vec{r}'$. Dabei wird nichts über die Vorzeichen von Δt und $\Delta t'$ angenommen.

Das Intervall Δs^2 bzw. $\Delta s'^2$ zwischen den beiden Ereignissen für den Beobachter in \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}' kann wieder über Gl. (I.5) definiert werden. Wenn \mathcal{B} und \mathcal{B}' beide Inertialsysteme sind, müssen Δs^2 und $\Delta s'^2$ immer gleich sein, und zwar nicht nur wenn das Raumzeit-Intervall Null ist.

Streng genommen lässt sich die Anforderung eines invarianten Intervalls Δs^2 unter Transformationen zwischen den Koordinaten zweier Inertialsysteme nur im Fall $\Delta s^2 = 0$ aus den einsteinschen Postulaten herleiten. Für $\Delta s^2 \neq 0$ wird die Anforderung *postuliert* — im Nachhinein führt die Bedingung aber zu den „guten“ Koordinatentransformationen, wobei sie rechtfertigt wird.

1.2.2 Lorentz-Transformationen

In der Transformation $(t, \vec{r}) \rightarrow (t', \vec{r}')$ zwischen den Zeit- und Ortskoordinaten zweier Inertialsysteme muss das oben definierte Linienelement ds^2 invariant bleiben.

Definition: Die linearen Transformationen der zeitlichen und räumlichen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.7})$$

welche das Linienelement $ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2$ invariant lassen, wobei Λ eine konstante 4×4 -Matrix ist, heißen *Lorentz^(h)-Transformationen*.

Bemerkungen:

* Dass die Transformationsmatrix Λ konstant, d.h. insbesondere ortsunabhängig, ist, folgt aus der postulierten Homogenität des Raums.

* In der obigen Definition kann man die Linearität der Transformationen weglassen und durch eine schwächere Annahme über die Transformation ersetzen (vgl. den noch nicht-existierenden Anhang I.A zu diesem Kapitel).

Andererseits existieren noch weitere lineare Koordinatentransformationen, die das Linienelement invariant lassen, vgl. Bemerkung in § I.3.2.

Wegen der Linearität nimmt die Transformation der zeitlichen und räumlichen Intervallen zwischen zwei Raumzeit-Punkten die gleiche Form

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta\vec{r}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\vec{r} \end{pmatrix}$$

an. Eine ähnliche Beziehung gilt noch, wenn die Intervalle zwischen den zwei Raumzeit-Punkten

^(h)H. A. LORENTZ, 1853–1926

infinitesimal klein sind. Hiernach wird mit solchen infinitesimalen Intervallen bzw. Linienelementen gearbeitet.

Es gibt zwei Haupttypen solcher Transformationen, und zwar einerseits Drehungen (§ I.2.2 a) — unter welchen das Zeitintervall dt sich nicht ändert — und Lorentz-Boosts (§ I.2.2 b).

I.2.2a Drehungen

Die Transformationen $(t, \vec{r}) \rightarrow (t', \vec{r}')$, in denen einerseits die Raumkoordinaten gedreht werden, während andererseits die Zeitkoordinate unverändert bleibt, bilden eine erste Klasse von Lorentz-Transformationen, die den Drehungen im dreidimensionalen Ortsraum der nicht-relativistischen Mechanik entsprechen. Solche Transformationen gelten für zwei Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander nicht bewegen, deren Achsen aber nicht parallel sind.

Die assoziierte Transformationsmatrix lautet

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix} \quad (\text{I.8})$$

wobei \mathcal{R} eine 3×3 -Drehmatrix bezeichnet. Diese erfüllt die charakteristische Eigenschaft $\mathcal{R}^\top \mathcal{R} = \mathbf{1}_3$, wobei $\mathbf{1}_3$ die dreidimensionale Identitätsmatrix ist, mit der zusätzlichen Bedingung $\det \mathcal{R} = 1$. In der Tat führt

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ d\vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt \\ \mathcal{R} d\vec{r} \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

unter Berücksichtigung der Eigenschaft $\mathcal{R}^\top \mathcal{R} = \mathbf{1}_3$ sofort zu

$$ds'^2 \equiv -c^2 dt'^2 + d\vec{r}'^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^\top \mathcal{R}^\top \mathcal{R} d\vec{r} = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2 = ds^2,$$

d.h. zur gewünschten Invarianz des Linienelements.

I.2.2b Lorentz-Boosts

Sei jetzt angenommen, dass sich \mathcal{B}' relativ zu \mathcal{B} mit konstanter Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. In beiden Inertialsystemen werden orthonormierte Koordinatensysteme benutzt, wobei die Achsen des Koordinatensystems von \mathcal{B}' parallel zu den Achsen von \mathcal{B} sind. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die $x = x'$ -Richtung der Koordinaten entlang der Bewegungsrichtung liegt, d.h. $\vec{u} = u \vec{e}_x$. Dazu wird noch angenommen, dass die Ursprungspunkte beider Koordinatensysteme zur Zeitpunkt $t = t' = 0$ übereinstimmen, so dass die Beziehung (I.7) dann erfüllt wird.

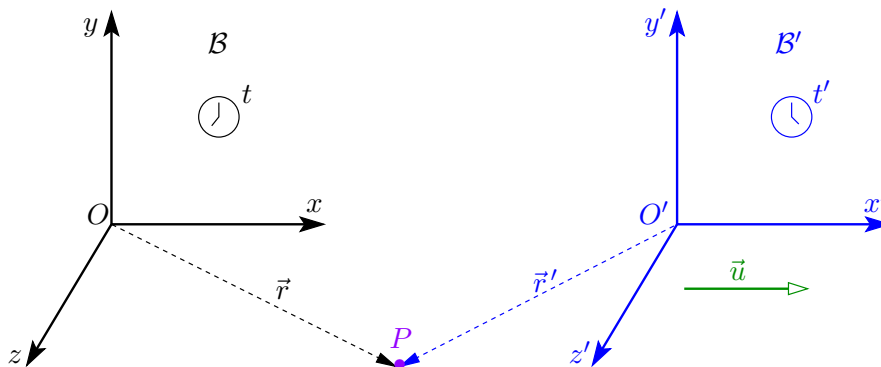


Abbildung I.1

Da nichts in den Richtungen $y = y'$ und $z = z'$ senkrecht zur Bewegung passiert, bleiben die Koordinaten eines Punkts entlang dieser Achsen unverändert in der Transformation von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' . Demzufolge gelten $dy' = dy$ und $dz' = dz$ für das Intervall zwischen benachbarten Punkten. Diese senkrechten Richtungen sollen sich auch nicht mit den anderen Koordinaten mischen, d.h. dt' , dx' sind unabhängig von dy , dz .

Daher ist die Transformation der Art

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ D & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

mit drei reellen Zahlen A, B, D, E . Dann lautet das Linienelement in \mathcal{B}'

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -(Ac dt + B dx)^2 + (Dc dt + E dx)^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -(A^2 - D^2)c^2 dt^2 + (E^2 - B^2) dx^2 + 2(DE - AB)c dt dx + dy^2 + dz^2, \end{aligned}$$

was gleich $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ sein muss. Beliebige dt und $d\vec{r}$ genügen dieser Gleichung nur genau dann, wenn das System

$$\begin{cases} A^2 - D^2 = 1 \\ E^2 - B^2 = 1 \\ DE - AB = 0 \end{cases}$$

erfüllt wird.

Seien $A \equiv \gamma$ und $B \equiv -\beta\gamma$. Dann stellen sie mit $D = B = -\beta\gamma$ und $E = A = \gamma$ eine Lösung des Systems dar, wenn $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ist. Dazu soll $\beta = |\vec{u}|/c$ sein, um den richtigen nicht-relativistischen Limes $u = |\vec{u}| \ll c$ wiederzufinden (s. unten). Schließlich lautet die Matrix für ein *Lorentz-Boost*, auch *spezielle Lorentz-Transformation* genannt,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.10a})$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta \equiv \frac{u}{c}, \quad (\text{I.10b})$$

entsprechend den Transformationen

$$\begin{cases} ct \rightarrow ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x \rightarrow x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y \rightarrow y' = y \\ z \rightarrow z' = z \end{cases} \quad (\text{I.10c})$$

γ heißt *Lorentz-Faktor* des Boosts.

Im *nicht-relativistischen Limes* $u \ll c$, d.h. $\beta \ll 1$, gibt eine Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta \ll 1}{\sim} 1 + \frac{\beta^2}{2} + \mathcal{O}(\beta^4), \quad (\text{I.11})$$

so dass $\beta\gamma \sim \beta + \mathcal{O}(\beta^3)$ ist. Aus Gl. (I.7) und der Form (I.10a) des Lorentz-Boosts folgen dann

$$c dt' = c dt + \mathcal{O}(\beta) \quad \text{und} \quad dx' = -\beta c dt' + dx + \mathcal{O}(\beta^2).$$

Die erste Gleichung gibt $t' = t + \text{Konstante}$, während die zweite mit $\beta = u/c$ zu $dx' = dx - u dt$ oder äquivalent $x' = x - ut$ führt, entsprechend dem bekannten nicht-relativistischen Ergebnis für ein Galilei-Boost entlang der x -Achse.

Bemerkungen:

* Unter Nutzung der *Rapidity* des Boosts

$$\xi_u \equiv \text{artanh} \frac{u}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{c+u}{c-u} \quad (\text{I.12})$$

nimmt die Transformationsmatrix des Lorentz-Boosts (I.10) die einfache Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \xi_u & -\sinh \xi_u & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_u & \cosh \xi_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

an. Anhand dieser Form sieht man, dass das Hintereinanderausführen zweier Lorentz-Boosts entlang derselben Richtung (hier in x -Richtung) mit jeweiligen Rapiditäten ξ_u, ξ_v wieder ein Lorentz-Boost ergibt, und zwar mit Rapidität $\xi_u + \xi_v$: die Rapidität ist additiv.

* Um die Koordinatentransformation für den Fall eines Lorentz-Boosts mit Geschwindigkeit \vec{u} entlang einer beliebigen Richtung kann man zuerst den Ortsvektor \vec{r} in eine Komponente \vec{r}_{\parallel} parallel zu \vec{u} und eine Komponente \vec{r}_{\perp} senkrecht zu \vec{u} zerlegen:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{r})\vec{u}}{u^2}$$

Unter dem Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit \vec{u} bleibt \vec{r}_{\perp} unverändert, $\vec{r}_{\perp} \rightarrow \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$, während $|\vec{r}_{\parallel}|$ und die Zeitkoordinate sich wie x und t in Gl. (I.10) transformieren:

$$ct \rightarrow ct' = \gamma \left(ct - \frac{u}{c} |\vec{r}_{\parallel}| \right), \quad |\vec{r}_{\parallel}| \rightarrow |\vec{r}'_{\parallel}| = \gamma (|\vec{r}_{\parallel}| - ut)$$

mit $u \equiv |\vec{u}|$ und $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (u/c)^2}$. Unter Nutzung von $u|\vec{r}_{\parallel}| = \vec{u} \cdot \vec{r}_{\parallel} = \vec{u} \cdot \vec{r}$ und von $\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$ kommt nach einfacher Umschreibung

$$t \rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c^2} \right), \quad \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{u} \cdot \vec{r})\vec{u}}{u^2} - \gamma \vec{u}t. \quad (\text{I.14})$$

I.2.2c Lorentz-Gruppe

Allgemeiner bilden die linearen Transformationen $(ct, \vec{r}) \rightarrow (ct', \vec{r}')$, die das Linienelement ds^2 [Gl. (I.6)] invariant lassen, eine Gruppe, die *Lorentz-Gruppe*.

Wie wir unten (§ I.2.3b) sehen werden, lassen sich diese Transformationen noch äquivalent dadurch charakterisieren, dass ihre Matrixdarstellung Λ die Gleichung

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (\text{I.15})$$

erfüllen, wobei η in Gl. (I.22) definiert ist. Dass die Menge solcher Matrizen versehen mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden, ist dann schnell bewiesen:

- Wenn Λ_1, Λ_2 die Gl. (I.15) erfüllen, dann gilt das noch für ihr Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$. Dazu ist das Produkt von Matrizen assoziativ: $\Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3) = (\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3$.
- Die 4×4 -Einheitsmatrix $\mathbb{1}_4$ — entsprechend der Identitätstransformation der Koordinaten — genügt die Beziehung (I.15), d.h. es gibt ein neutrales Element.
- Aus Gl. (I.15) folgt $|\det \Lambda| = 1$, d.h. Λ ist invertierbar; die inverse Matrix Λ^{-1} erfüllt trivial die definierende Beziehung.

Die Lorentz-Gruppe wird oft mit $O(1,3)$ bezeichnet.

Sowohl die Drehungen des § I.2.2a als die Lorentz-Boosts des § I.2.2b, die je eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe bilden, sind sog. *eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen*, Elemente der *eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe* $SO^+(1,3)$.⁽⁴⁾ Bei den *eigentlichen Lorentz-Transformationen* handelt es sich um solche mit Determinante +1; diese bilden die *eigentliche Lorentz-Gruppe*, die mit $SO(1,3)$ bezeichnet wird.

⁽⁴⁾ Statt $O^+(1,3)$ bzw. $SO^+(1,3)$ wird auch die Notation $SO^\uparrow(1,3)$ bzw. $SO^\uparrow(1,3)$ benutzt.

Wiederum sind die *orthochronen Lorentz-Transformationen* diejenigen, welche die Richtung der Zeitkomponente nicht ändern. Das heißt, das Matrixelement oben links in der Matrixdarstellung Λ — das in Abschn. I.3 mit Λ^0_0 bezeichnet wird — muss positiv, und in der Tat größer gleich 1, sein. Diese Transformationen bilden die *orthochrone Lorentz-Gruppe* $O^+(1,3)$.⁽⁴⁾

Beispiele von uneigentlichen ($\det \Lambda = -1$) Lorentz-Transformationen sind einerseits die *Raumspiegelung* $(ct, \vec{r}) \rightarrow (ct' = ct, \vec{r}' = -\vec{r})$ mit der Matrixdarstellung

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

und andererseits die *Zeitumkehr* $(ct, \vec{r}) \rightarrow (ct' = -ct, \vec{r}' = \vec{r})$ mit Matrixdarstellung

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.17})$$

die offensichtlich auch nicht orthochron ist. Dann ist die (kommutierende) Verknüpfung beider Transformationen, mit Matrixdarstellung $\Lambda_P \Lambda_T = -\mathbb{1}_4$, eine nicht-orthochrone eigentliche Lorentz-Transformation.

Mathematisch stellen die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $SO^+(1,3)$ und die drei Mengen $SO^-(1,3) \equiv \{\Lambda_P \Lambda_T \Lambda, \Lambda \in SO^+(1,3)\}$, $\{\Lambda_P \Lambda, \Lambda \in SO^+(1,3)\}$ und $\{\Lambda_T \Lambda, \Lambda \in SO^+(1,3)\}$ die vier Zusammenhangskomponenten der Lorentz-Gruppe $O(1,3)$ dar, entsprechend jeweils den vier Möglichkeiten $++$, $+-$, $-+$, $--$ für die Vorzeichen der Determinante $\det \Lambda$ und des Matrixelements Λ^0_0 .

1.2.3 Minkowski-Raum

Wegen der Absolutheit von Zeit und Raum in der klassischen Mechanik faktorisiert sich die zugehörige nicht-relativistische Raumzeit in das Produkt einer eindimensionalen Zeit-Geraden mit dem dreidimensionalen euklidischen Ortsraum \mathcal{E}_3 . Dagegen mischen die Lorentz-Boosts die zeitlichen und räumlichen Koordinaten miteinander. Demzufolge lohnt es sich, die Zeit und die drei Ortskoordinaten als Komponenten eines Vektors in einer vierdimensionalen reellen Raumzeit \mathcal{M}_4 .

Dann wird ein Punkt von \mathcal{M}_4 , entsprechend einem Zeitpunkt und einem Ort im (dreidimensionalen) Raum, *Ereignis* genannt.

1.2.3a Viererortsvektor

Sei \mathcal{B} ein Bezugssystem, versehen mit einem Koordinatensystem, wobei die räumlichen Koordinaten kartesisch sind. Nach deren Angabe lässt sich ein Ereignis durch seinen *Viererortsvektor* \mathbf{x} mit Komponenten x^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ charakterisieren, wobei $x^0 \equiv ct$, während die x^i mit $i = 1, 2, 3$ die Koordinaten des Ortsvektors \vec{r} sind. Der Kurze halber wird hiernach für die Zerlegung in Zeit- und Ortskoordinaten die Notation

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

benutzt.

Definition: Die Trajektorie eines Massenpunktes in der Raumzeit heißt *Weltlinie*.

Zur graphischen Darstellung einer Weltlinie — oder allgemeiner zur Veranschaulichung von relativistischen kinematischen Effekte — werden *Minkowski⁽ⁱ⁾-Diagramme* verwendet. Ein solches

⁽ⁱ⁾H. MINKOWSKI, 1864–1909

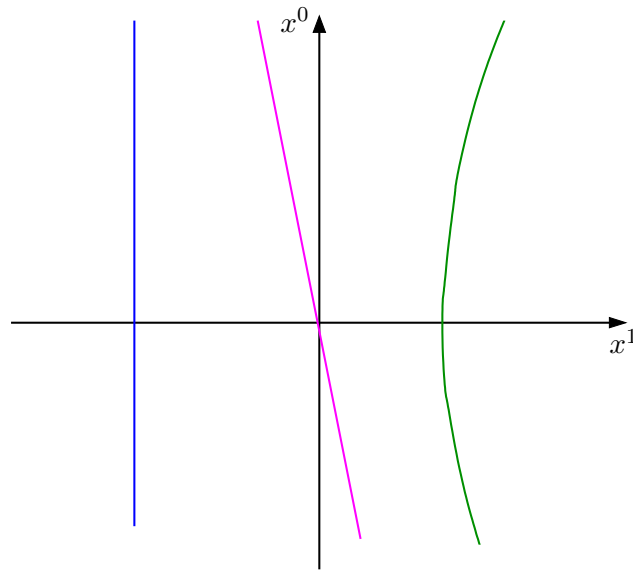


Abbildung I.2 – Beispiel eines Minkowski-Diagramms mit drei Weltlinien (links: ruhender Körper; Mitte: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit; rechts: beschleunigte Bewegung).

Diagramm ist ein zweidimensionaler Querschnitt durch die Raumzeit mit nur einer räumlichen Dimension und dazu die zeitliche Dimension, beide bezüglich eines gegebenen Bezugssystems \mathcal{B} . Konventionell wird die letztere vertikal (oder zumindest mit einem Winkel zur vertikalen kleiner als 45°) und nach oben gerichtet dargestellt. Dementsprechend ist die Weltlinie eines relativ zu \mathcal{B} ruhenden Körpers eine vertikale Gerade, wie in Abb. I.2 (linke Weltlinie) gezeigt wird. Die Weltlinie eines Körpers in gleichförmiger geradliniger Bewegung wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt; der Betrag der Steigung dx^0/dx^1 dieser Geraden soll größer als 1 sein, denn dx^0/dx^1 ist gleich c mal dem Rückwert der x^1 -Komponente der Geschwindigkeit (v^1) des Körpers, und v^1 soll kleiner als c sein.

Schließlich ist die Weltlinie, die einer beliebig beschleunigten Bewegung entspricht, eine Kurve, die für jeden Wert von x^0 nur einen Wert von x^1 annimmt, und deren Steigung immer größer als 1 ist, wie z.B. die rechte Weltlinie in Abb. I.2.

I.2.3 b Metrischer Tensor

Bezeichnet man mit dx die Verschiebung zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen in \mathcal{M}_4 , dann lässt sich das Linienelement (I.6) als

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (\text{I.19})$$

schreiben, wobei die dx^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ die Koordinaten von dx sind.

Für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ definiert man Zahlen $\eta_{\mu\nu}$ durch

$$\begin{cases} \eta_{00} = -1 \\ \eta_{ii} = +1 \text{ für } i = 1, 2, 3 \\ \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Mithilfe dieser Zahlen lautet das Linienelement (I.19) noch

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{I.21})$$

wobei die einsteinsche Summenkonvention benutzt wurde: die Summe über doppelt auftretende Lorentz-Indizes, hier μ und ν , von 0 bis 3 wird nicht geschrieben.

In Matrixdarstellung wird $\eta_{\mu\nu}$ zum Element der $(\mu+1)$ -ten Zeile und $(\nu+1)$ -ten Spalte einer 4×4 -Matrix:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.22})$$

und das Linienelement wird zu

$$ds^2 = dx^T \eta dx \quad (\text{I.23})$$

wobei dx^T den zu dx transponierten Zeilenvektor mit Elementen dx^μ bezeichnet.

Die 16 Zahlen $\eta_{\mu\nu}$ sind die Komponenten des *metrischen Tensors* $\boldsymbol{\eta}$, auch *Minkowski-Metrik* genannt.⁽⁵⁾ In welchem Sinn es sich dabei um einen Tensor handelt, wird hiernach in § I.3.3 weiter diskutiert.

Dass das Linienelement ds^2 die gleiche Form (I.23) in allen Inertialsystemen annimmt, führt zu einer für Lorentz-Transformationen charakteristischen Beziehung, die den metrischen Tensor involviert. Unter der Koordinatentransformation $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformiert sich die infinitesimale Verschiebung gemäß $dx \rightarrow dx' = \Lambda dx$. Der Einsatz von dx' und dx'^T in Beziehung (I.23) gibt

$$ds'^2 = dx'^T \eta dx' = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda dx.$$

Die Anforderung $ds'^2 = ds^2$ und Gl. (I.23) lauten dann $dx'^T \eta dx' = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda dx$. Da diese Gleichung für alle Verschiebung dx gelten muss, ergibt sich schließlich die Matrixgleichung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (\text{I.24})$$

die somit äquivalent zur Invarianz des Linienelements unter Lorentz-Transformationen ist.

Wie wir in § I.3.2 c sehen werden, dient der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ dazu, ein (pseudo-)skalares Produkt auf \mathcal{M}_4 zu definieren. Versehen mit diesem Produkt heißt die Raumzeit \mathcal{M}_4 noch *Minkowski-Raum*. Wiederum ist ein System von *Minkowski-Koordinaten* ein Koordinatensystem in \mathcal{M}_4 , in welchem die Komponenten des metrischen Tensors die einfache Form (I.20) annehmen⁽⁶⁾ — was im Folgenden immer der Fall sein wird.

Bemerkungen:

* Die Definition⁽⁷⁾ $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ des metrischen Tensors ist nicht universell: manche Autoren benutzen stattdessen die Konvention⁽⁸⁾ $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ und definieren dementsprechend $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$ als Linienelement.

* Ein Merkmal des Minkowski-Raums \mathcal{M}_4 der Speziellen Relativitätstheorie ist die Existenz von *globalen* Minkowski-Koordinatensystemen, deren Koordinaten überall und zu jeder Zeit gelten — obwohl \mathcal{M}_4 mathematisch kein Vektorraum, sondern eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist.

* In diesem Skript wurde der metrische Tensor nach den Lorentz-Transformationen eingeführt; jedoch die logische Herangehensweise, die oben nur implizit benutzt wurde, geht eher in die andere Richtung: der metrische Tensor wird zunächst postuliert, dann sind die Lorentz-Transformationen die zugehörigen *Isometrien*, d.h. die linearen Koordinatentransformationen, die das entsprechende (Pseudo-)Skalarprodukt invariant lassen. Dementsprechend kann die Matrixgleichung (I.24) eigentlich als die definierende Beziehung der Lorentz-Transformationen betrachtet werden.

⁽⁵⁾ Mathematisch handelt es sich eher um eine Pseudo-Metrik, denn $\boldsymbol{\eta}$ ist nicht positiv definit.

⁽⁶⁾ Das heißt, dass die zugehörigen Basisvektoren ein orthonormiertes System bilden.

⁽⁷⁾ „Metrik mit positiver Signatur“, „mostly plus metric“, „East Coast metric“...

⁽⁸⁾ „Metrik mit negativer Signatur“, „mostly minus metric“, „West Coast metric“...

* Hier wurden für den metrischen Tensor und seine natürliche Matrixdarstellung unterschiedliche Notationen $\boldsymbol{\eta}$ bzw. η verwendet, um den Unterschied zwischen den beiden mathematischen Objekten zu betonen.

I.2.3c Kausalitätsstruktur des Minkowski-Raums

Der metrische Tensor mit dem damit einhergehenden Begriff des Intervalls Δs^2 zwischen zwei Ereignissen induziert eine Kausalitätsstruktur im Minkowski-Raum. Somit kann Δs^2 entweder negativ, positiv oder Null sein, was physikalisch unterschiedlichen Möglichkeiten entspricht.

- Im Fall $\Delta s^2 < 0$ kann man immer ein Inertialsystem \mathcal{B} derart finden, dass die Weltlinie seines Ursprungspunkts durch die zwei Ereignisse geht. Dementsprechend spricht man von einem *zeitartigen Intervall* zwischen den beiden Ereignissen.

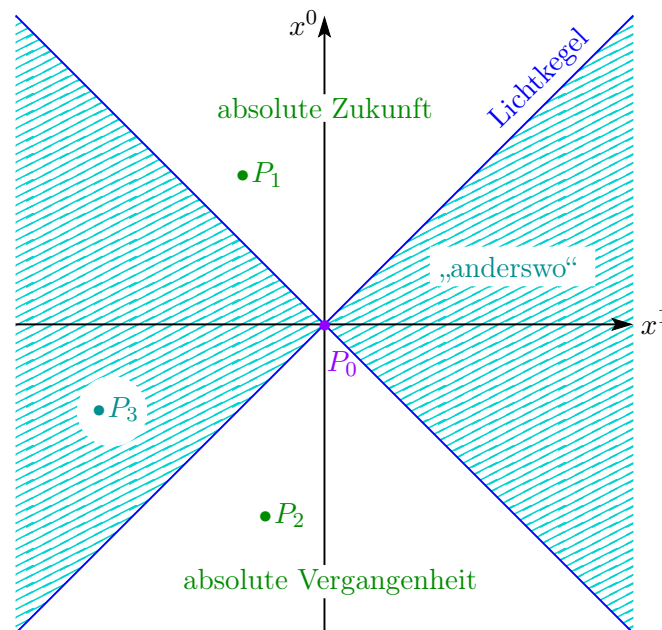


Abbildung I.3 – Kausalitätsstruktur der Raumzeit.

Beispielsweise ist das Intervall zwischen den in Abb. I.3 dargestellten Ereignissen P_0 und P_1 zeitartig. Dabei ist $x^0(P_1) > x^0(P_0)$, d.h. P_1 liegt in der Zukunft von P_0 : was in P_0 passiert kann die Physik in P_1 beeinflussen, so dass die zwei Ereignisse miteinander kausal verknüpft sind.

- Für ein Intervall $\Delta s^2 > 0$, wie jenes zwischen den Ereignissen P_0 und P_3 der Abb. I.3, kann ein Inertialsystem, dessen Nullpunkt durch die beiden Ereignisse geht, nicht gefunden werden. Angenommen, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen ist, kann kein aus P_0 ausgesandte Signal P_3 erreichen, und umgekehrt: die zwei Ereignisse sind nicht miteinander kausal verknüpft.

Eigentlich gibt es in diesem Fall Inertialsysteme, in denen wie in Abb. I.3 $x^0(P_0) > x^0(P_3)$, während in anderen Inertialsystemen $x^0(P_0) < x^0(P_3)$ gilt: keines der Ereignisse liegt auf absoluter Weise in der Zukunft des anderen. Da es sogar Inertialsysteme gibt, in denen die beiden Ereignisse gleichzeitig sind, $x^0(P_0) = x^0(P_3)$, spricht man im Fall $\Delta s^2 > 0$ von einem *raumartigen Intervall*.

- Schließlich kann im Fall eines *lichtartigen Intervalls* $\Delta s^2 = 0$ zwischen zwei Ereignissen Licht von dem einen zum anderen propagieren, so dass die Ereignisse noch im kausalen Zusammenhang stehen.

Vom Standpunkt eines Ereignisses P_0 kann somit die Raumzeit in unterschiedlichen Bereichen zerlegt werden (vgl. Abb. I.3). Die Ereignisse, die in lichtartigem Abstand von P_0 sind, bilden den *Lichtkegel*.⁽⁹⁾ Innerhalb des letzteren, d.h. in zeitartigem Abstand von P_0 , befinden sich die Ereignisse, die im kausalen Zusammenhang mit P_0 sind, und zwar entweder in seiner *absoluten Zukunft* — wie P_1 in Abb. I.3 — oder in der *absoluten Vergangenheit*, wie P_2 . Dagegen sind die Ereignisse außerhalb des Lichtkegels — d.h. in raumartigem Abstand von P_0 , wie P_3 — kausal entkoppelt von P_0 : sie liegen im *absoluten Anderswo*.

Da das Intervall Δs^2 den gleichen Wert in allen Inertialsystemen annimmt, ist die obige Kausalitätsstruktur die gleiche für alle inertielle Beobachter — wie es sein muss!

Bemerkung: Entsprechend der kausalen Struktur hängt die Physik in P_0 nur von den Ereignissen innerhalb dessen „vergangenen Lichtkegels“ ab: instantane Fernwirkung wird somit ausgeschlossen.

1.2.4 Kinematische Effekte

Aus der Form von speziellen Lorentz-Transformationen folgen mehrere kinematische Effekte. In diesem ganzen Abschnitt sind \mathcal{B} und \mathcal{B}' zwei Inertialsysteme, wobei sich \mathcal{B}' relativ zu \mathcal{B} mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Die zeitlichen und räumlichen Koordinaten (t, \vec{r}) und (t', \vec{r}') von beiden Systemen (mit $\vec{r}' = \vec{r} = \vec{0}$ bei $t' = t = 0$) hängen über das Lorentz-Boost (I.14) zusammen.

1.2.4 a Zeitdilatation

Betrachte man zwei Ereignisse, z.B. zwei sukzessive Ticks einer Uhr, die beide im Ursprungspunkt $\vec{r} = \vec{0}$ von \mathcal{B} zu Zeiten t_1 und $t_2 = t_1 + \Delta t$ stattfinden. Vom Standpunkt von \mathcal{B}' finden diese Ereignisse in unterschiedlichen Raumpunkten — die Uhr bewegt sich relativ zu \mathcal{B}' — zu den Zeitpunkten $t'_1 = \gamma t_1$ und $t'_2 = \gamma t_2 = \gamma(t_1 + \Delta t) = t'_2 + \gamma \Delta t$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ dem Lorentz-Faktor statt. Somit ist das in \mathcal{B}' gemessene Zeitintervall zwischen den Ereignissen

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad (\text{I.25})$$

wegen $\gamma > 1$ größer als das in \mathcal{B} gemessene Zeitintervall Δt : die bewegte Uhr geht langsamer als die ruhende, entsprechend *Zeitdilatation*.

Eigenzeit

Betrachte man einen bewegten Massenpunkt. Zu jeder Zeit kann man ein Inertialsystem \mathcal{B}_0 finden, das momentan mit dem (nicht unbedingt) Ruhesystem des Massenpunktes übereinstimmt. Das heißt, dass der Massenpunkt relativ zu \mathcal{B}_0 momentan ruht. Sei τ die Zeitkoordinate von \mathcal{B}_0 ; τ heißt *Eigenzeit* des Massenpunktes.

Sei t die Zeit in einem Inertialsystem \mathcal{B} , relativ zu dem der Massenpunkt (oder äquivalent das Inertialsystem \mathcal{B}_0) sich mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Laut Gl. (I.25) hängt das Eigenzeitelement $d\tau$ mit dem infinitesimalen Zeitintervall dt in \mathcal{B} über $dt = \gamma d\tau$ oder äquivalent

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt \quad (\text{I.26})$$

zusammen.

Bemerkung: Das Linienelement entlang der Weltlinie des Massenpunktes lässt sich auch als

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (\text{I.27})$$

schreiben, was als Definition von der Eigenzeit angesehen werden kann.

⁽⁹⁾Um den Kegel zu erkennen, muss sich die Leserin erstens eine Raumzeit mit einer zeitlichen Richtung — die der Achse des Kegels entspricht — und zwei räumlichen Richtungen vorstellen; dann kann sie die dritte Raumdimension hinzufügen.

I.2.4b Gleichzeitigkeit

Seien P_1, P_2 Ereignisse, die bezüglich eines Inertialsystems \mathcal{B} gleichzeitig sind: $x^0(P_1) = x^0(P_2)$. Anhand eines Minkowski-Diagramms (Abb. I.4) oder algebraisch unter Berücksichtigung der Form des Lorentz-Boosts zwischen Koordinatensystemen zeigt man einfach, dass die Ereignisse in einem anderen Inertialsystem \mathcal{B}' , das sich relativ zu \mathcal{B} bewegt, im Allgemeinen nicht gleichzeitig sind: $x^{0'}(P_1) \neq x^{0'}(P_2)$.

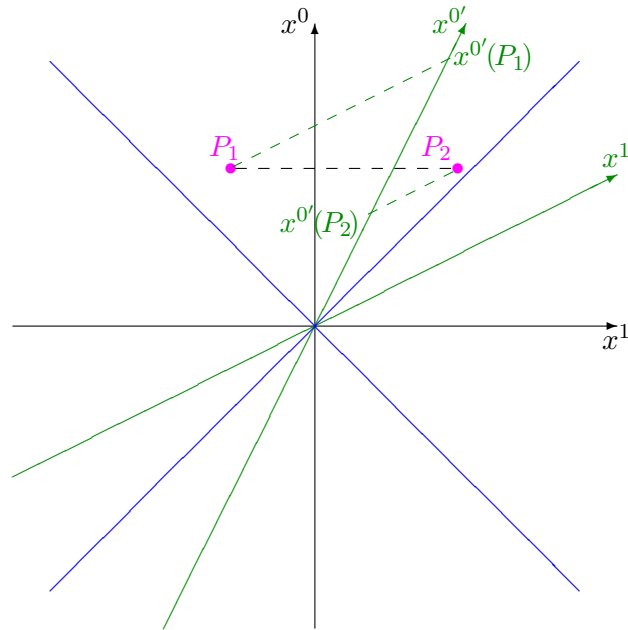


Abbildung I.4 – Zur Illustration der Nicht-Absolutheit der Gleichzeitigkeit.

Somit ist Gleichzeitigkeit kein absoluter Begriff, sondern gilt nur relativ zu einem bestimmten Bezugssystem.

Eine Folgerung dieses Ergebnisses bezieht sich auf einen Satz von Uhren, die in einem gegebenen Inertialsystem \mathcal{B} zur Zeit $t = 0$ alle die gleiche Zeit anzeigen, obwohl sie sich in unterschiedlichen Orten gefunden: d.h. *synchronisierte Uhren*.

In einem anderen Inertialsystem \mathcal{B}' , das sich relativ zu \mathcal{B} bewegt, werden diese Uhren im Allgemeinen nicht mehr synchron sein.

I.2.4c Längenkontraktion

Betrachte man nun einen Maßstab, der relativ zum Inertialsystem \mathcal{B}' entlang der x' -Achse ruht; seien x'_A und x'_B die x' -Koordinaten seiner Endpunkte, wobei beide gleichzeitig (bezüglich \mathcal{B}') abgelesen werden; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $x'_B > x'_A$ annehmen. Dann ist die in \mathcal{B}' gemessene Länge des Maßstabs $\ell' = x'_B - x'_A$. Da der Maßstab bezüglich \mathcal{B}' ruht, wird ℓ' dessen *Ruhelänge* oder *Eigenlänge* genannt und mit ℓ_0 bezeichnet.

Sei erstens angenommen, dass sich das Inertialsystem \mathcal{B}' relativ zu \mathcal{B} mit einer Geschwindigkeit \vec{u} parallel zur x -Achse bewegt, so dass die Zeit- und Ortskoordinaten in beiden Bezugssystemen über Gl. (I.10c) verknüpft sind. Ein in \mathcal{B} ruhender Beobachter misst zur gleichen Zeit $t_A = t_B$ die Positionen x_A, x_B der Endpunkte des für ihn bewegten Maßstabs, und folgert daraus seine Länge $\ell = x_B - x_A$ bezüglich \mathcal{B} . Wegen des Transformationsgesetzes (I.10c) gilt $x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A)$ bzw. $\ell' = \gamma\ell$, d.h.

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (\text{I.28})$$

Im Vergleich zu seiner Ruhelänge ist der bewegte Maßstab um einen Faktor γ verkürzt, entsprechend *Längenkontraktion* (oder *Lorentz-Kontraktion*⁽¹⁰⁾).

Wenn die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme \mathcal{B} und \mathcal{B}' senkrecht auf der Richtung des Maßstabs ist, prüft man einfach nach, dass dessen Länge unverändert bleibt: Längenkontraktion findet nur entlang der Bewegungsrichtung statt.

Infolgedessen werden Volumina ebenfalls kontrahiert, und zwar auch nur entlang der Bewegungsrichtung. Wenn \mathcal{V}_0 das Volumen eines ausgedehnten Körpers in dessen Ruhesystem (*Eigenvolumen*) bezeichnet, wird dieses Volumen zu

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_0}{\gamma} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{u}^2}{c^2}} \quad (\text{I.29})$$

in einem Bezugssystem, relativ zu welchem der Körper sich mit Geschwindigkeit \bar{u} bewegt. Diese Transformation gilt insbesondere für das infinitesimale Raumvolumenelement $d^3\vec{r} = dx dy dz$.

1.2.4 d Additionsgesetz für Geschwindigkeiten

Ein Massenpunkt bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$ bezüglich des Inertialsystems \mathcal{B} , das sich selbst relativ zu \mathcal{B} mit Geschwindigkeit \bar{u} bewegt. Gesucht ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ des Massenpunkts relativ zu \mathcal{B} .

Aus der Transformation (I.14) folgt nach Austausch der Rollen von (t, \vec{r}) und (t', \vec{r}') , wobei \bar{u} durch $-\bar{u}$ ersetzt wird:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\bar{u} \cdot \vec{r}'}{c^2} \right), \quad \vec{r} = \vec{r}' + (\gamma - 1) \frac{(\bar{u} \cdot \vec{r}') \bar{u}}{u^2} + \gamma \bar{u} t'.$$

Diese Gleichungen gelten noch für dt und $d\vec{r}$ als Funktionen von dt' und $d\vec{r}'$:

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{\bar{u} \cdot d\vec{r}'}{c^2} \right) = \gamma \left(1 + \frac{\bar{u} \cdot \vec{v}'}{c^2} \right) dt', \quad d\vec{r} = d\vec{r}' + (\gamma - 1) \frac{(\bar{u} \cdot d\vec{r}') \bar{u}}{u^2} + \gamma \bar{u} dt'.$$

Die Division der zweiten durch die erste ergibt dann

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{u} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left(\bar{u} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right) \frac{\bar{u}}{u^2} + \bar{u} \right],$$

d.h. noch

$$\vec{v} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{u} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \vec{v}' + \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \frac{\bar{u} \cdot \vec{v}'}{u^2} + 1 \right] \bar{u} \right). \quad (\text{I.30})$$

Wenn \vec{v}' und \bar{u} parallel sind, ist natürlich \vec{v} auch entlang der gleichen Richtung, und man findet das *Additionsgesetz für parallele Geschwindigkeiten*

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}}, \quad (\text{I.31})$$

wobei u , v und v' die Projektionen der Geschwindigkeiten auf deren gemeinsame Richtung sind.

Anhand dieses Gesetzes findet man leicht, dass wenn $|u|$ und $|v'|$ streng kleiner als c sind, dann gilt das auch für $|v|$. Im Fall $|v'| = c$ ergibt sich $|v| = c$, unabhängig von $|u|$, was genau dem zweiten einsteinschen Postulat (I.4) entspricht — physikalisch muss aber $|u| < c$ gelten, denn ein Inertialbeobachter kann nicht auf c beschleunigt werden, vgl. § II.1.2 b.

Bemerkung: Das Additionsgesetz (I.31) kann auch sofort aus der Additivität der Rapiditäten (vgl. Bemerkung in § I.2.2 b) hergeleitet werden.

⁽¹⁰⁾In der englischsprachigen Literatur, *Lorentz-Fitzgerald*^(j)-Kontraktion.

^(j)G. F. FITZGERALD, 1851–1901

I.3 Vierervektoren und Vierertensoren

Die in Abschn. I.2 eingeführten Lorentz-Transformationen geben die Beziehungen zwischen den Minkowski-Koordinaten eines gegebenen Ereignisses bezüglich zwei verschiedener Inertialsysteme \mathcal{B} und \mathcal{B}' . In diesem Übergang von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' können sich die mathematischen Darstellungen physikalischer Größen nicht nur wie der Viererortsvektor x , sondern auch anders transformieren.

Der Kürze halber wird hiernach die Redensart „unter Lorentz-Transformationen“ statt „im Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen“ verwendet, wobei die besagte Transformation diejenige für die Viererortsvektoren [Gl. (I.33)] ist.

I.3.1 Lorentz-Skalare

Definition: Ein *Lorentz-Skalar* oder *Viererskalar* ist eine Größe, die invariant unter Transformationen von einem Inertialsystem zu einem anderen ist.

Ein erstes Beispiel davon ist (definitionsgemäß!) das Linienelement (I.6) bzw. (I.21). Demzufolge ist das durch Gl. (I.26) gegebene Eigenzeitelement $d\tau$ ebenfalls ein Lorentz-Skalar.

Ein weiteres Beispiel ist das *Vierervolumenelement* d^4x , definiert durch

$$d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (\text{I.32})$$

Wenn der 4-Ortsvektor sich gemäß $x \rightarrow x' = \Lambda x$ transformiert, entsprechend Gl. (I.33b) für die Koordinaten, transformiert sich das 4-Volumenelement gemäß

$$d^4x \rightarrow d^4x' = |\det \Lambda| d^4x,$$

woraus das Ergebnis dank $|\det \Lambda| = 1$ folgt.

Hiernach werden wir auf weitere Lorentz-Skalare treffen.

Bemerkung: Man definiert auch *Lorentz-Pseudoskalare*, die invariant unter der eigentlichen Lorentz-Gruppe sind, jedoch unter uneigentlichen Transformationen wie Raumspiegelung oder Zeitumkehr ihr Vorzeichen ändern.

I.3.2 Vierervektoren

Der Viererortsvektor x mit Komponenten x^μ [Gl. (I.18)] ist ein erstes Beispiel von Vierervektor, der sich im Übergang von einem Inertialsystem \mathcal{B} zu einem zweiten Inertialsystem \mathcal{B}' gemäß

$$x \rightarrow x' = \Lambda x \quad (\text{I.33a})$$

mit Λ einer Lorentz-Transformation transformiert, entsprechend für die Koordinaten

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu \quad \text{für } \mu' = 0', 1', 2', 3'. \quad (\text{I.33b})$$

Wie es sich herausstellt, gibt es zwei unterschiedliche Arten von Vierervektoren, die sich entweder wie x oder wie der damit assoziierte Vierergradient transformieren.

Bemerkungen:

* Aus Gl. (I.33b) folgt die Beziehung

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \quad \forall \mu', \nu. \quad (\text{I.34})$$

* In der Tat sind die Lorentz-Transformationen nicht die einzigen linearen Transformationen, die das Linienelement (I.6) invariant lassen. Daneben gibt es noch die affinen Transformationen der *Poincaré^(k)-Gruppe* (oder *inhomogenen Lorentz-Gruppe*), der Form

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + b \quad (\text{I.35a})$$

^(k)H. POINCARÉ, 1854–1912

mit einem beliebigen konstanten Vierervektor \mathbf{b} ; komponentenweise lautet diese Transformation

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu + b^{\mu'}. \quad (\text{I.35b})$$

Die Poincaré-Transformationen mit $\Lambda = \mathbb{1}_4$ und beliebigem \mathbf{b} sind offensichtlich die Raumzeit-Translationen.

I.3.2a Kontravariante Vierervektoren

Definition: Ein sog. *kontravarianter Vierervektor* \mathbf{V} ist eine Menge aus vier Zahlen V^μ , die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Koordinaten x^μ des Viererortsvektors transformieren, d.h.

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu V^\nu, \quad (\text{I.36a})$$

oder in Matrixform

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}' = \Lambda \mathbf{V}. \quad (\text{I.36b})$$

Ein Beispiel ist die *Vierergeschwindigkeit* \mathbf{u} eines massiven Teilchens (Massenpunktes) entlang seiner Weltlinie $\mathbf{x}(s)$, die als

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{x}(s)}{d\tau} \quad (\text{I.37a})$$

definiert ist, mit s einer Parametrisierung der Weltlinie und τ der Eigenzeit des Teilchens. Komponentenweise lautet diese Definition

$$u^\mu \equiv \frac{dX^\mu(s)}{d\tau} \quad (\text{I.37b})$$

wobei u^μ bzw. $x^\mu(s)$ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ die Koordinaten der Vierergeschwindigkeit bzw. der Weltlinie sind. Dass \mathbf{u} ein kontravarianter Vierervektor ist, folgt aus der Tatsache, dass das Eigenzeitelement $d\tau$ im Zähler ein Lorentz-Skalar ist.

Wenn v^i mit $i = 1, 2, 3$ die Komponenten der dreidimensionalen Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens und γ den damit assoziierten Lorentz-Faktor bezeichnen, dann lauten die Koordinaten der Vierergeschwindigkeit $u^0 = \gamma c$ und $u^i = \gamma v^i$ für $i = 1, 2, 3$, d.h.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.38})$$

Bemerkung: Für ein masseloses Teilchen, z.B. ein Photon, wird die Vierergeschwindigkeit nicht definiert, da solche Teilchen kein Ruhesystem haben, in welchem die Eigenzeit definiert werden kann: sie bewegen sich entlang lichtartiger Weltlinien.

I.3.2b Kovariante Vierervektoren

Seien

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{I.39a})$$

die Komponenten des *Vierergradient*-Operators:

$$\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (\text{I.39b})$$

wobei die drei räumlichen Komponenten genau die Koordinaten des dreidimensionalen Gradienten sind.

Mithilfe der Kettenregel gilt unter der Transformation (I.33)

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\rho'}} = \Lambda^{\rho'}_\nu \frac{\partial}{\partial x^{\rho'}} = \Lambda^{\rho'}_\nu \partial_{\rho'}. \quad (\text{I.40})$$

Sei $\Lambda^{\mu}_{\rho'}$ das (μ, ρ') -Element der inversen Matrix Λ^{-1} , d.h.

$$\Lambda^{\mu}_{\rho'} \Lambda^{\rho'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad \text{und} \quad \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}, \quad (\text{I.41})$$

wobei δ^{μ}_{ν} das übliche Kronecker-Symbol ist. Multipliziert man Gl. (I.40), die für jedes $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt, mit $\Lambda^{\nu}_{\mu'}$ und summiert man über ν , so ergibt sich

$$\Lambda^{\nu}_{\mu'} \partial_{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} \Lambda^{\rho'}_{\nu} \partial_{\rho'} = \delta^{\rho'}_{\mu'} \partial_{\rho'},$$

d.h.

$$\partial_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} \partial_{\nu}. \quad (\text{I.42})$$

Somit transformiert sich der Vierergradient mit Λ^{-1} , wenn sich der Ortsvektor mit Λ transformiert.

Definition: Ein *kovarianter Vierervektor* ist eine Menge aus vier Größen W_{μ} , die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Komponenten ∂_{μ} des Vierergradienten verhalten, d.h.

$$W_{\mu} \rightarrow W_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} W_{\nu}. \quad (\text{I.43})$$

Jedem kontravarianten Vierervektor mit Koordinaten V^{μ} kann man einen kovarianten Vierervektor mit Komponenten V_{μ} gemäß

$$V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} \quad (\text{I.44})$$

zuordnen.

In einer Basistransformation ändern sich die V^{ν} bzw. $\eta_{\mu\nu}$ gemäß

$$V^{\nu} \rightarrow V^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_{\rho} V^{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta_{\mu\nu}$$

vgl. Gl. (I.36a) bzw. (I.53). Dann kommt

$$V_{\mu} \rightarrow V_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu'} V^{\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu'}_{\rho} V^{\rho} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \eta_{\mu\nu} \delta^{\nu}_{\rho} V^{\rho},$$

wobei die letzte Gleichung aus Gl. (I.41) folgt. Schreibt man dann $\eta_{\mu\nu} \delta^{\nu}_{\rho} V^{\rho} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} = V_{\mu}$, so ergibt sich

$$V_{\mu} \rightarrow V_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} V_{\mu},$$

was zu beweisen war. \square

Umgekehrt kann mit jedem kovarianten Vierervektor mit Komponenten V_{μ} der kontravariante Vierervektor mit Komponenten

$$V^{\mu} = \eta^{\mu\nu} V_{\nu} \quad (\text{I.45})$$

assoziiert werden, mit $\eta^{\mu\nu}$ den Komponenten des inversen metrischen Tensors $\boldsymbol{\eta}^{-1}$, die numerisch gleich den $\eta_{\mu\nu}$ sind, vgl. § I.3.3b. Unter Verwendung des metrischen Tensors (I.20) findet man

$$V_0 = -V^0, \quad V_1 = V^1, \quad V_2 = V^2, \quad V_3 = V^3. \quad (\text{I.46})$$

Bemerkungen:

* Bezeichnet man den 4-komponentigen Zeilenvektor mit Koordinaten W_{μ} mit \underline{W} , so lässt sich die Transformation (I.43) noch in Matrixdarstellung als

$$\underline{W} \rightarrow \underline{W}' = \underline{W} \Lambda^{-1} \quad (\text{I.47})$$

schreiben. Dann lautet Gl. (I.44) bzw. (I.45)

$$\underline{V} = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\eta}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\eta}^{-1} \underline{V}^T, \quad (\text{I.48})$$

wobei $\boldsymbol{\eta}^T$ in der ersten Gleichung durch $\boldsymbol{\eta}$ ersetzt werden kann, weil der metrische Tensor — und damit seine Matrixdarstellung — symmetrisch ist. Mit dieser Änderung ist die zweite Gleichung die transponierte der ersten.

* Kontravariante und kovariante Vierervektoren sind Elemente unterschiedlicher Vektorräume, auch wenn sie die gleiche physikalische Dimension haben — wie z.B. kontravariante und kovariante Vierergeschwindigkeiten. Der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ und sein Inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ bilden zwar eine Bijektion zwischen diesen Vektorräumen, so dass man kurz nur von „Vierervektoren“ sprechen kann, ohne kontra- oder kovariant zu präzisieren. Man darf aber kontra- und kovariante Vektoren nicht miteinander addieren oder gleich setzen: Ausdrücke wie $a^\mu + b_\mu$ oder $a^\mu = b_\mu$ sind sinnlos — wenn es sich dabei nicht um numerische Gleichungen handelt, die nur in einem Bezugssystem gelten.

1.3.2c Viererprodukt

Seien V^μ bzw. W_μ die Komponenten eines kontravarianten bzw. kovarianten Vierervektors. Die Transformationsgesetze (I.36a) und (I.43) zeigen, dass die Kombination $W_\mu V^\mu$, mit Summe über $\mu = 0, 1, 2, 3$, ein Lorentz-Skalar ist. Dieses Skalar wird *Viererprodukt* der beiden Vierervektoren genannt, oder auch *Lorentz-Skalarprodukt* — etwa uneigentlich, da es sich eher um ein Pseudo-Skalarprodukt handelt.

Da $W_\mu V^\mu = W^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu = W^\nu V_\nu = W^\mu V_\mu$ ist, spielt es hier keine Rolle, welcher Index oben und welcher unten ist, so lange es einen oben und einen unten gibt. Komponentenweise gilt

$$W_\mu V^\mu = -W^0 V^0 + W^1 V^1 + W^2 V^2 + W^3 V^3 = W^\mu V_\mu. \quad (\text{I.49a})$$

Unter Verwendung der Matrixdarstellungen \underline{W} bzw. \underline{V} für den kovarianten bzw. kontravarianten Vierervektor, lässt sich das Viererprodukt noch als $W_\mu V^\mu = \underline{W}\underline{V}$ schreiben. Ein Nachteil dieser Schreibweise ist, dass die Multiplikation zweier Matrizen nicht-kommutativ ist: $\underline{W}\underline{V}$ ist eine Zahl, $\underline{V}\underline{W}$ eine 4×4 -Matrix. Das heißt, der Gleichung $W_\mu V^\mu = W^\mu V_\mu$ entspricht $\underline{W}\underline{V} = \underline{V}\underline{W}$, wobei die Symmetrie bezüglich des Austauschs der Vierervektoren verloren wird. Somit führt man eine weitere Notation, ähnlich dem Skalarprodukt von zwei Dreiervektoren im euklidischen Raum:

$$W_\mu V^\mu = \underline{W}\underline{V} \equiv W \cdot V. \quad (\text{I.49b})$$

Dann gilt problemlos $W \cdot V = V \cdot W$. Man sollte aber dabei nicht vergessen, dass es sich trotz der Notation um das *Lorentz-Skalarprodukt* handelt, nicht um das euklidische, d.h. dass es ein Minus-Zeichen vor dem Produkt der zeitlichen Komponenten gibt.

Bemerkung: Im Gegensatz zum Viererprodukt $W_\mu V^\mu$ sind die Kombinationen $W^\mu V^\mu$ und $W_\mu V_\mu$ keine Skalare unter Lorentz-Transformation, d.h. sie nehmen unterschiedliche Werte in unterschiedlichen Inertialsystemen an.

Ein erstes Beispiel von Viererprodukt ist die Kombination $\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x})$, mit den Komponenten ∂_μ des Vierergradienten und den Koordinaten $j^\mu(\mathbf{x})$ eines Feldes, das in jedem Punkt \mathbf{x} eines Gebiets der Raumzeit \mathcal{M}_4 definiert ist:

$$\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial j^\mu(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j^0(\mathbf{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1(\mathbf{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \frac{\partial j^0(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}), \quad (\text{I.50})$$

wobei der Dreiervektor \vec{j} die räumlichen Komponenten j^i des Vierervektors j zusammenfasst, während $\vec{\nabla} \cdot$ die (Dreier-)Divergenz dieses Vektorfeldes darstellt. In Analogie mit dem dreidimensionalen Fall heißt $\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}) \equiv \partial \cdot j(\mathbf{x})$ *Viererdivergenz* des Vierervektorfeldes j .

Lorentz-Quadrat

Eine weitere, wichtige Art von Viererprodukt ist das skalare *Lorentz-Quadrat* eines Vierervektors:

$$V^2 \equiv V_\mu V^\mu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2, \quad (\text{I.51})$$

das denselben Wert in allen Inertialsystemen annimmt.

Ein erstes Beispiel davon ist das Linienelement $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$, welches definitionsgemäß invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Wiederum beträgt das Lorentz-Quadrat

einer Vierergeschwindigkeit (I.37) immer $u^2 = u_\mu u^\mu = -c^2$, in allen Inertialsystemen (und für alle Weltlinien!).

Definition: Je nach dem Vorzeichen des Lorentz-Quadrats unterscheidet man zwischen drei Arten von Vierervektoren:

- *zeitartige* Vierervektoren, mit negativem Lorentz-Quadrat $V^2 < 0$;
- *lichtartige* Vierervektoren, auch *Nullvektoren* genannt, mit Lorentz-Quadrat $V^2 = 0$;
- *raumartige* Vierervektoren, mit positivem Lorentz-Quadrat $V^2 > 0$.

Zum Beispiel ist die Vierergeschwindigkeit eines Massenpunktes ein zeitartiger Vierervektor.

I.3.3 Vierertensoren

Auf dem euklidischen Raum \mathcal{E}_3 der nicht-relativistischen Mechanik gibt es „Dreier-“Tensoren höherer Stufe, die sich unter Drehungen alle gleich transformieren. Ähnlich existieren auf der Minkowski-Raumzeit \mathcal{M}_4 *Vierertensoren* bzw. *Lorentz-Tensoren* mit bestimmten Transformationsgesetzen unter Lorentz-Transformationen.

Diese Vierertensoren können vom Typ $\binom{m}{n}$, oder „ m -fach kontravariant und n -fach kovariant“, sein, d.h. ihre Komponenten besitzen $m \geq 0$ kontravariante und $n \geq 0$ kovariante Indizes, wobei jeder Index sich wie ein entsprechender Vierervektor transformiert. Beispielsweise transformiert sich der Vierertensor dritter Stufe mit Komponenten $T^{\mu\nu\rho}$ wie $V^\mu V^\nu V^\rho$.

Insbesondere lautet das Transformationsgesetz für einen Lorentz-Tensor vom Typ $\binom{0}{2}$, unter Verwendung der Gl. (I.43),

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} T_{\mu\nu}. \quad (\text{I.52a})$$

In Matrixform kann ein solcher Vierertensor zweiter Stufe durch eine quadratische 4×4 -Matrix \mathbb{T} mit Elementen $T_{\mu\nu}$ dargestellt werden; dann lautet die Transformation

$$\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}' = \Lambda^T \mathbb{T} \Lambda, \quad (\text{I.52b})$$

wie aus der Gleichung $\Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} T_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\mu'} T_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\nu'} = (\Lambda^T)_{\mu'}^\mu T_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\nu'}$, sofort folgt.

I.3.3a Metrischer Tensor

Der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ wurde schon in Gl. (I.20) über die Angabe seiner Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ in einem bestimmten System von Minkowski-Koordinaten definiert. Jede dieser Komponenten nimmt in allen solchen Systemen denselben Wert an, d.h. der metrische Tensor ist *invariant* unter Lorentz-Transformationen.

Unter Verwendung des Transformationsgesetzes (I.52a) transformieren sich die Komponenten von $\boldsymbol{\eta}$ gemäß

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{I.53a})$$

entsprechend in Matrixdarstellung

$$\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta}' = \Lambda^T \boldsymbol{\eta} \Lambda. \quad (\text{I.53b})$$

Fördert man die Invarianz des metrischen Tensors unter Lorentz-Transformationen, so sollen die Matrizen $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\eta}'$ gleich sein, woraus sich Bedingung (I.24) ergibt.

I.3.3b Inverser metrischer Tensor

Dem metrischen Tensor wird der *inverse metrische Tensor* $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ zugeordnet, dessen Komponenten $\eta^{\mu\nu}$ bzw. Matrixdarstellung $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ derart sind, dass

$$\eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} = \eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu \quad \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{\eta}^{-1} \boldsymbol{\eta} = \mathbb{1}_4 \quad (\text{I.54})$$

gelten, wobei $\mathbb{1}_4$ die 4×4 -Einheitsmatrix bezeichnet. Dabei ist eigentlich $\boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{\eta}$, d.h. numerisch gilt $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ für alle möglichen Werte von μ und ν .

Wie in § I.3.2 b schon gesehen wurde lassen sich mithilfe des metrischen bzw. des inversen metrischen Tensors mit Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ bzw. $\eta^{\mu\nu}$ kontra- bzw. kovariante Lorentz-Indizes herauf- bzw. herabziehen, vgl. Gl. (I.44) und (I.45). Zum Beispiel kann man aus einem Tensor vom Typ $\binom{0}{2}$ mit Komponenten $T_{\mu\nu}$ verwandte Tensoren von den Typen $\binom{1}{1}$ und $\binom{2}{0}$ erhalten:

$$T_{\mu}{}^{\sigma} \equiv \eta^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}, \quad T^{\rho}{}_{\nu} \equiv \eta^{\rho\mu} T_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad T^{\rho\sigma} \equiv \eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} T_{\mu\nu} = \eta^{\rho\mu} T_{\mu}{}^{\sigma} = \eta^{\sigma\nu} T^{\rho}{}_{\nu}. \quad (\text{I.55})$$

Wenn $T_{\mu\nu}$ nicht symmetrisch ist, sind die Tensoren mit Komponenten $T_{\mu}{}^{\sigma}$ und $T^{\rho}{}_{\nu}$ a priori unterschiedlich.⁽¹¹⁾

Angewandt auf $\eta^{\mu\nu}$ selber lautet die zweite der Gleichungen (I.55)

$$\eta^{\rho}{}_{\nu} \equiv \eta^{\rho\mu} \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{I.56})$$

Der Vergleich mit Gl. (I.54) gibt dann $\eta^{\rho}{}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\rho}$.

I.3.3 c Levi-Civita-Symbol

Ein anderer „invarianter Vierertensor“ — solange man nur orthonormierte Koordinatensysteme betrachtet — ist das vollständig antisymmetrische *Levi-Civita*⁽¹⁾-*Symbol*⁽¹²⁾

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

Hier sollte beachtet werden, dass $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$, während für das dreidimensionale Levi-Civita Tensor $\epsilon_{123} = \epsilon^{123}$ gilt.

Unter einer Lorentz-Transformation Λ transformiert sich dieses Symbol gemäß

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\rho'}{}_{\rho} \Lambda^{\sigma'}{}_{\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = (\det \Lambda) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{I.58})$$

wobei die letzte Gleichung aus der Definition der Determinante folgt. Somit sieht man, dass sich das Vorzeichen unter uneigentlichen Lorentz-Transformationen ändert.

I.3.3 d Kontraktion zweier Tensoren

Das Herauf- oder Herabziehen von Indizes mithilfe des metrischen Tensors oder seines Inversen sind Beispiele von Tensorverjüngungen. Allgemeiner können zwei Tensoren \mathbf{T} und \mathbf{T}' kontrahiert werden, vorausgesetzt der eine (mindestens) einen kovarianten und der andere einen kontravarianten Index hat. Dann wird über solche Indizes kontrahiert, wie z.B. $T^{\mu\nu} T'_{\mu\rho}$ (einfache Kontraktion) oder $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\mu\nu}$ (doppelte Kontraktion).

I.3.4 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes

Laut dem ersten einsteinschen Postulat (I.3) sollen die Naturgesetze mathematisch so formuliert werden, dass die entsprechenden Gleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen. Theorien, die diesem Prinzip genügen, werden als Lorentz- oder relativistisch *kovariant* bezeichnet.

Infolgedessen können Gleichungen in Lorentz-kovarianten Theorien nur Identitäten zwischen Lorentz-Tensoren gleiches Typs sein, nachdem alle möglichen Kontraktionen der Indizes berücksichtigt wurden. Solche Gleichungen können entweder „geometrisch“, in Matrixdarstellung (für Vierertensoren der Stufe 1 oder 2) oder komponentenweise geschrieben werden.

⁽¹¹⁾ Bezeichnet \mathbf{T} die Matrixdarstellung des Tensors mit Komponenten $T_{\mu\nu}$, so sind die drei anderen Tensoren jeweils durch $\mathbf{T}\eta$, $\eta\mathbf{T}$ und $\eta\mathbf{T}\eta$ dargestellt, wie die Leserin einfach nachprüfen kann.

⁽¹²⁾ Einige Autoren benutzen die Konvention $\epsilon_{0123} = +1$, entsprechend $\epsilon^{0123} = -1$.

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA, 1873–1941

Ein einfaches Beispiel einer kovarianten Gleichung ist somit $V = W$ oder äquivalent $V^\mu = W^\mu$ — wobei die Gleichung für alle $\mu = 0, 1, 2, 3$ gelten muss, obwohl das oft nicht explizit geschrieben wird. Ein anderes Beispiel ist $\mathbf{T}\mathbf{V} = \mathbf{W}$ bzw. komponentenweise $T^\mu{}_\nu V^\nu = W^\mu$. Unter einer Lorentz-Transformation transformieren sich diese Beispiele in $\mathbf{V}' = \mathbf{W}'$ bzw. $V^{\mu'} = W^{\mu'}$ oder $\mathbf{T}'\mathbf{V}' = \mathbf{W}'$ bzw. $T^{\mu'}{}_{\nu'} V^{\nu'} = W^{\mu'}$, d.h. sie nehmen die gleiche Form an.

Dagegen sind Identitäten wie $V^\mu = T^\mu{}_\nu$ oder $V^\mu = W_\mu$ keine gültige relativistisch kovariante Gleichungen, sondern können einen (Tipp-?)Fehler signalisieren...

Bemerkung: Manchmal wird statt Lorentz-kovariant die Redensart „Lorentz-invariant“ verwendet. Streng genommen bedeutet aber die Letztere, dass die Gleichungen unverändert unter den Lorentz-Transformationen bleiben: dies stellt eine stärkere Bedingung dar, als die Invarianz der Form der Gleichungen, die nur im Fall einer Gleichung zwischen zwei skalaren Größen erfüllt ist, wie z.B. $u^2 = -c^2$ (für das Lorentz-Quadrat einer Vierergeschwindigkeit).

Literatur zum Kapitel I

- Feynman, *Vorlesungen über Physik. Band 1* [2] = *Lectures on Physics. Vol. I* [3], Kap. 15–17.
- Fließbach, *Mechanik* [4], Kap. IX.
- Greiner, *Klassische Mechanik I* [5] Kap. III.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [6] = *Introduction to Electrodynamics* [7], Kap. 12.1.
- Landau & Lifschitz, *Band II: Klassische Feldtheorie* [8] = *The classical theory of fields* [9], Kap. I.
- Nolting, *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* [10], 1. Teil.
- Scheck, *Mechanik* [11] Kap. 4.

Appendix zum Kapitel I

I.A Beweis der Linearität von Lorentz-Transformationen

In diesem Anhang wird bewiesen, dass die Koordinatentransformationen $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$, welche das Linienelement $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ invariant lassen, lineare (oder genauer, affine) Transformationen sind.

Sei $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x^\nu)$ eine solche Transformation. Wie wir unten sehen werden, sollten für den gesuchten Beweis die Funktionen $x^{\rho'}$ mindestens zweimal kontinuierlich differenzierbar sein, was physikalisch keine unvernünftige Anforderung darstellt. Wegen der Kettenregel hängen die Differentiale der Koordinaten über

$$dx^{\rho'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (\text{I.59})$$

zusammen, so dass das in \mathcal{B}' gemessene Linienelement durch

$$ds'^2 \equiv \eta_{\rho'\sigma'} dx^{\rho'} dx^{\sigma'} = \eta_{\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{I.60})$$

gegeben ist. Die Anforderung $ds'^2 = ds^2$ mit $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ führt zur Bedingung

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu}. \quad (\text{I.61})$$

Das Ableiten beider Seiten dieser Gleichung nach der Koordinate x^λ mit $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$ gibt unter Verwendung der Produktregel

$$0 = \eta_{\rho'\sigma'} \left(\frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{I.62a})$$

Unter Austausch der Indizes λ und μ bzw. λ und ν lautet diese Gleichung

$$0 = \eta_{\rho'\sigma'} \left(\frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) \quad \forall \lambda, \mu, \nu. \quad (\text{I.62b})$$

bzw.

$$0 = \eta_{\rho'\sigma'} \left(\frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) \quad \forall \lambda, \mu, \nu. \quad (\text{I.62c})$$

Addiert man jetzt Gl. (I.62a) und Gl. (I.62b) und subtrahiert man Gl. (I.62c), so kürzen sich der zweite Term von Gl. (I.62a) mit dem von Gl. (I.62c) und — dank der Identität $\eta_{\rho'\sigma'} = \eta_{\sigma'\rho'}$ — der erste Term von Gl. (I.62b) mit dem ersten von Gl. (I.62c) heraus, während die zwei übrig bleibenden Beiträge gleich sind:

$$0 = 2\eta_{\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{I.63})$$

Diese Gleichung kann man als Produkt von links nach rechts von einem vierkomponentigen Zeilenvektor $\partial^2 x^{\rho'}/\partial x^\mu \partial x^\lambda$ (mit $\rho' = 0, 1, 2, 3$) mit zwei 4×4 -Matrizen mit jeweiligen Elementen $2\eta_{\rho'\sigma'}$ und $\partial x^{\sigma'}/\partial x^\nu$. Wenn die letztere invertierbar ist, d.h. wenn die Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ invertierbar ist, kann mit den inversen Matrizen multiplizieren: schließlich erhält man die Bedingung

$$\frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = 0 \quad \forall \lambda, \mu, \rho' \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (\text{I.64})$$

die nach zweifacher Integration erstens zu $\partial x^{\rho'}/\partial x^{\mu} = \Lambda^{\rho'}_{\mu}$ mit $\Lambda^{\rho'}_{\mu} \in \mathbb{R}$ — vgl. Gl. (I.34) — und dann zur affinen Transformation

$$x^{\rho'} = \Lambda^{\rho'}_{\mu} x^{\mu} + b^{\rho'} \quad (\text{I.65})$$

führt, entsprechend einer Poincaré-Transformation (I.35) — und dem gesuchten Ergebnis.

Bemerkungen:

* Die mathematische Bedingung einer invertierbaren Transformation $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'}(x^{\nu})$ bedeutet physikalisch, dass man immer eine Rücktransformation $x^{\mu'} \rightarrow x^{\mu}(x^{\nu'})$ finden kann. Somit sind beide Koordinaten- bzw. Inertialsysteme äquivalent, wie im einsteinschen Relativitätsprinzip (I.3) ausgedrückt wird.

* Die Bedingung (I.60) ist natürlich nichts anderes als Gl. (I.53a).

KAPITEL II

Relativistische Punktmechanik

Der Formalismus des vorigen Kapitels wird nun angewandt, um die charakteristischen Größen und Funktionen zur Beschreibung der Bewegung eines freien relativistischen Massenpunktes auszudrücken (Abschn. II.1). Dann wird die relativistische Verallgemeinerung des zweiten newtonschen Gesetzes vorgestellt (Abschn. II.2). Schließlich werden einige einfache Ergebnisse für Systeme aus mehreren Teilchen angegeben (Abschn. II.3).

II.1 Bewegung eines freien relativistischen Teilchens

II.1.1 Lagrange-Funktion und Wirkung eines freien Teilchens

Die Wirkung S eines physikalischen Systems, insbesondere eines freien Teilchens, ist eine reelle Zahl. Sie ist im Allgemeinen Funktion von (den mathematischen Darstellungen von) Größen — Positionen, Geschwindigkeiten —, die vom Bezugssystem abhängen. Die physikalisch realisierte Bewegung, die sich über die Extrema der Wirkung finden lässt, sollte aber bezugssystemunabhängig sein. Um sicherzustellen, dass die Wirkung immer für die gleichen physikalischen Trajektorien extremal ist, fordert man an, dass S ein Lorentz-Skalar ist, d.h. den gleichen Zahlenwert in allen Inertialsystemen annimmt.

Betrachte man nun einen einzelnen, wechselwirkungsfreien Massenpunkt mit Masse m . Wegen der Homogenität der Raumzeit — d.h. die Invarianz der Physik unter zeitlichen und räumlichen Translationen — darf seine Lagrange-Funktion $L(t, \vec{x}, \vec{v})$ nicht explizit von der Zeit oder von seiner Position abhängen; d.h. sie kann nur Funktion von der Geschwindigkeit \vec{v} sein. Die letztere ist zwar nicht Lorentz-invariant, jedoch die Lagrange-Funktion L selbst ist auch nicht Lorentz-invariant: nur das Produkt $L dt$, das zwischen zwei Zeitpunkten integriert wird, soll Lorentz-invariant sein, damit S skalar sei.

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir eine „einfache“ Größe, proportional zum Zeitintervallelement dt und dazu Funktion der Geschwindigkeit, die Lorentz-invariant ist, und zwar das infinitesimale Eigenzeitintervall $d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} dt$, vgl. Gl. (I.26). Daher lautet ein möglicher Ansatz für die Wirkung zwischen zwei Ereignissen A, B der Raumzeit

$$S = \alpha \int_A^B d\tau \quad (\text{II.1})$$

mit einer reellen Zahl α . Diese Wirkung lässt sich noch als

$$S = \alpha \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt$$

umschreiben; daher entspricht der Ansatz der Lagrange-Funktion

$$L = \alpha \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}. \quad (\text{II.2})$$

Die Taylor-Entwicklung der letzteren für den nicht-relativistischen Limes $|\vec{v}|/c \ll 1$ lautet

$$L = \alpha \left[1 - \frac{\vec{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^4}{c^4}\right) \right].$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammer kommt zuerst eine Konstante (α), die keine Rolle bei den Bewegungsgleichungen spielt. Der nächste Term ist $-\alpha\vec{v}^2/2c^2$: damit er mit der Lagrange-Funktion eines nicht-relativistischen freien Teilchens $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ übereinstimmt, soll α gleich $-mc^2$ sein. Somit lautet die Lagrange-Funktion bzw. die Wirkung eines freien relativistischen Massenpunktes

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad (\text{II.3a})$$

bzw.

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau. \quad (\text{II.3b})$$

Erfahrung zeigt, dass der Ansatz (II.3a) die richtige Physik wiedergibt, insbesondere den richtigen Impuls und die richtige Energie, wie sie im nächsten Paragraphen eingeführt werden.

Bemerkung: Damit die Wirkung (II.3b) zu einer Bewegungsgleichung führen kann, sollte sie nicht trivial sein, d.h. m muss ungleich Null sein.

II.1.2 Impuls und Energie eines freien Teilchens

II.1.2a Impuls

Gemäß der traditionellen Definition ist die i -te Komponente des konjugierten Impulses des Massenpunktes mit Lagrange-Funktion (II.3a) durch

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

gegeben, wobei hier die Komponente mit einem kovarianten Index geschrieben wurde, im Einklang mit der Anwesenheit einer Division durch eine kontravariante Komponente im rechten Glied.⁽¹³⁾ Eine einfache Berechnung liefert dann

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v} \quad (\text{II.4})$$

wobei γ der mit der Geschwindigkeit \vec{v} assoziierten Lorentz-Faktor ist.

II.1.2b Energie

Ausgehend von der Lagrange-Funktion lässt sich die Energie des freien relativistischen Massenpunktes als

$$E = \sum_{i=1}^3 p_i v^i - L$$

bestimmen, d.h.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma mc^2. \quad (\text{II.5})$$

⁽¹³⁾ Äquivalent könnte man $p^i \equiv \partial L / \partial v_i$ definieren. Für die räumlichen kartesischen Komponenten spielt die kontra- oder kovariante Position des Indexes eigentlich keine Rolle: $v_i = v^i$ bzw. $p^i = p_i$.

In Fall eines ruhenden Massenpunktes ergibt sich $E_0 = mc^2$, entsprechend der *Massenenergie* oder *Ruheenergie*. Wiederum ist die Differenz $E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$ die kinetische Energie des bewegten Massenpunktes.

Bemerkungen:

* Vergleicht man die Gl. (II.4) und (II.5), so findet man, dass sich die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E} \quad (\text{II.6})$$

schreiben lässt. Somit ist der nicht-relativistische Limes $|\vec{v}| \ll c$ äquivalent zu $|\vec{p}|c \ll E$.

* Im Grenzwert $|\vec{v}| \rightarrow c$ geht für eine Masse $m \neq 0$ die Energie (II.5) gegen unendlich, so dass ein massives Teilchen niemals die Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen kann — dafür brauche man eine unendlich große Energie, um es zu beschleunigen. In diesem Sinne ist c eine „maximale Geschwindigkeit“.

II.1.2c Viererimpuls

Definiert man $p^0 \equiv E/c$, so bilden p^0, p^1, p^2, p^3 ein 4-Tupel von Zahlen, die laut den Gl. (II.4) und (II.5) gleich m mal den Komponenten u^0, u^1, u^2, u^3 der Vierergeschwindigkeit (I.38) sind. Da die Masse m ein Lorentz-Skalar ist, sind die p^μ die Komponenten eines Vierervektors \mathbf{p} :

$$p^\mu = mu^\mu \quad (\text{II.7a})$$

bzw.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (\text{II.7b})$$

mit

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

Dieser Vierervektor heißt *Viererimpuls*.

Bemerkung: Die obige Aussage „die Masse ist ein Lorentz-Skalar“ ist eine eindeutige Ablehnung des Begriffs der sog. „relativistischen Masse“ — wobei die letztere als das Produkt aus Lorentz-Faktor und „Ruhemasse“ definiert ist.

Unter Verwendung der Definition (I.51) und der Gl. (II.4) und (II.5) beträgt das Lorentz-Quadrat \mathbf{p}^2 des Viererimpulses (II.8)

$$\mathbf{p}^2 \equiv -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2c^2. \quad (\text{II.9})$$

Dies folgt auch sofort aus der Beziehung (II.7b), die zu $\mathbf{p}^2 = m^2\mathbf{u}^2$ führt, oder aus einer Berechnung im Ruhesystem des Massenpunktes.

Dieses Ergebnis wird auch oft in der Form

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \quad (\text{II.10})$$

geschrieben, die oft als *Dispersionsrelation* oder *Energie-Impuls-Beziehung* bezeichnet werden. Falls der erste Term auf der rechten Seite viel kleiner als der zweite ist, d.h. $|\vec{p}| \ll mc$ — was wiederum äquivalent zu $|\vec{p}| \ll E/c$ ist, entsprechend dem nicht-relativistischen Limes —, gibt eine Taylor-Entwicklung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2} - \left(\frac{1}{8} \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2} \right)^2 + \dots \right]$$

d.h.

$$E = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \dots \quad (\text{II.11})$$

Dabei erkennt man als ersten, führenden Term die Massenenergie, dann als nächsten Term die nicht-relativistische kinetische Energie, während der dritte Term (und die nächsten) eine relativistische Korrektur darstellt. Insbesondere ist im nicht-relativistischen Fall die kinetische Energie viel kleiner als die Massenenergie — die im nicht-relativistischen Rahmen aber nie ins Betracht gezogen wird, weil sie nur eine additive Konstante darstellt!

Viererimpulserhaltung

Aus der Invarianz der Wirkung (II.3b) unter zeitlichen und räumlichen Translationen folgt, dass die Energie und der Impuls Konstanten der Bewegung sind. Folglich ist der Viererimpuls (II.8) eine Erhaltungsgröße, wie sich auch direkt aus der Invarianz der Wirkung (II.3b) unter den Raumzeit-translationen $x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu$ herleiten lässt.⁽¹⁴⁾

Mathematisch kann man die Viererimpulserhaltung als

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 \quad (\text{II.12})$$

ausdrücken: dabei wird die Ableitung nach der Eigenzeit betrachtet, um auf der linken Seite der Gleichung einen Lorentz-Vektor bzw. dessen Komponenten zu erhalten. Somit ergibt sich eine Gleichung, die in jedem Inertialsystem die gleiche Form annimmt, wie gemäß dem ersten einsteinschen Postulat (I.3) der Fall sein soll.

II.2 Kovariante Formulierung des Grundgesetzes der Mechanik

Wir haben gerade gesehen, dass der Viererimpuls eines freien Massenpunktes erhalten ist, was sich „relativistisch kovariant“ als Gl. (II.12) schreiben lässt.

Unterliegt der Massenpunkt Kräften, so sollte diese Gleichung modifiziert werden: sie ändert sich nämlich im nicht-relativistischen Fall, der als Grenzwert in den relativistischen Gleichungen enthalten ist. Um die newtonsche Mechanik zu verallgemeinern, wird somit ein Vierervektor \mathbf{f} eingeführt, die *Viererkraft*, mit Komponenten f^μ . Im Einklang mit dem nicht-relativistischen Fall sollte eine solche Viererkraft nur von der Raumzeit-Position \mathbf{x} und der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} des Massenpunktes abhängen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{bzw.} \quad f^\mu(x^\nu, u^\nu). \quad (\text{II.13})$$

Beispielsweise wird in nächsten Kapitel die Form der relativistisch kovarianten Formulierung der Lorentz-Kraft angegeben.

Unter Angabe einer solchen Viererkraft — oder der Resultierenden solcher Viererkräfte —, die natürliche relativistisch kovariante Verallgemeinerung des zweiten newtonschen Gesetzes ist

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{f} \quad (\text{II.14a})$$

oder äquivalent, komponentenweise

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu. \quad (\text{II.14b})$$

In Abwesenheit von (Vierer)Kraft vereinfacht sich dieses Gesetz zur Viererimpulserhaltung (II.12).

Unter Einführung der *Viererbeschleunigung* des Massenpunktes

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad \text{bzw.} \quad a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (\text{II.15})$$

⁽¹⁴⁾ Beispielsweise unter Verwendung des *Noether*^(m)-Theorems.

^(m) E. NOETHER, 1882–1935

lässt sich Gl. (II.14a) bzw. (II.14b) als

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{f} \quad \text{bzw.} \quad ma^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad (\text{II.16})$$

umschreiben.

Bemerkungen:

- * Die oben eingeführte Viererkraft wird auch *Minkowski-Kraft* genannt.
- * Damit die Beziehungen (II.14), (II.16) erfüllt werden können, dürfen die Komponenten einer Viererkraft nicht beliebig sein. In der Tat folgt aus der Konstanz des Lorentz-Quadrats u^2 der Vierergeschwindigkeit, dass diese senkrecht zur Viererbeschleunigung ist: $u \cdot a = u_\mu a^\mu = 0$. Somit soll $u \cdot f = u_\mu f^\mu = 0$ gelten,⁽¹⁵⁾ d.h. nur drei der vier Komponenten der Viererkraft sind unabhängig voneinander — z.B. die drei räumlichen Komponenten, die im nicht-relativistischen Limes die (newtonsche) Dreierkraft \vec{F} wiedergeben müssen. Eigentlich findet man einfach $f^i = \gamma F^i$.
- * Während die Vierergeschwindigkeit zeitartig ist, ist die Viererbeschleunigung raumartig: $a^2 > 0$.

II.3 Mehrteilchensysteme

Sei ein System aus N Punktmassen $\{m_a\}_{a=1,\dots,N}$ mit jeweiligen Viererimpulsen \mathbf{p}_a mit $a = 1, \dots, N$. Wenn die Punktmassen keinen äußeren Kräften unterliegen, sondern nur miteinander wechselwirken, sind in der newtonschen Mechanik deren Gesamtenergie und Gesamtimpuls erhalten. Dementsprechend ist der gesamte Viererimpuls des Systems

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N \quad \text{bzw.} \quad P^\mu \equiv (p_1)^\mu + (p_2)^\mu + \dots + (p_N)^\mu \quad (\text{II.17})$$

erhalten. Dabei ist die zeitliche Komponente P^0 offensichtlich $1/c$ mal die Gesamtenergie, während die räumlichen Komponenten P^i dem Gesamtimpuls des Systems entsprechen.

Diese Viererimpulserhaltung gilt insbesondere, wenn man Teilchenprozesse betrachtet, und zwar entweder Teilchenstöße oder Zerfälle. Dann soll der gesamte Viererimpuls nach dem Prozess gleich dem gesamten Viererimpuls vor dem Prozess sein.

Beispielsweise lautet die Viererimpulserhaltung für einen Stoßprozess mit zwei Teilchen A, B im Anfangszustand und zwei Teilchen C, D im Endzustand

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D \quad \text{bzw.} \quad (p_A)^\mu + (p_B)^\mu = (p_C)^\mu + (p_D)^\mu \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{II.18})$$

Für einen Zwei-Körper-Zerfall, d.h. im Fall des Zerfalls mit zwei Produkten im Endzustand, $A \rightarrow B + C$ werden die Energien und die Beträge der Impulse der Produkte völlig durch die Viererimpulserhaltung bestimmt. Insgesamt besitzen die zwei Viererimpulse $\mathbf{p}_B, \mathbf{p}_C$ 8 Komponenten. Dabei stellen die Dispersionsrelationen $(\mathbf{p}_B)^2 = -m_B c^2$, $(\mathbf{p}_C)^2 = -m_C c^2$ zwei Bedingungen dar, so dass es nur 6 Freiheitsgrade übrig bleibt. Dazu liefert die Erhaltung des gesamten Viererimpulses vier zusätzliche Bedingungen: am Ende gibt es nur noch 2 Freiheitsgrade — entsprechend den zwei Winkeln der Flugrichtung des einen Teilchens.

Betrachte man den Zerfall im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens, wo dessen Viererimpuls $\mathbf{p}_A = (m_{AC}, \vec{0})$ ist. Gesucht sind die Energien E_B, E_C und Impulsbeträge $|\vec{p}_B|, |\vec{p}_C|$ der Zerfallsprodukte bezüglich dieses Bezugssystems. Aus der Viererimpulserhaltung

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C \quad \text{bzw.} \quad (p_A)^\mu = (p_B)^\mu + (p_C)^\mu \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{II.19})$$

folgt $\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B$, d.h. nach Bildung des Lorentz-Quadrats

$$(\mathbf{p}_C)^2 = (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)^2. \quad (\text{II.20})$$

⁽¹⁵⁾Wie im Fall der in § III.3.3 angegebenen Lorentz-Kraft auf eine Punktladung.

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch die Energie-Impuls-Beziehung für Teilchen C gegeben. Dann kann die rechte Seite ausmultipliziert werden:

$$(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)^2 = (\mathbf{p}_A)^2 + (\mathbf{p}_B)^2 - 2\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B,$$

wie sich auch unter Nutzung der Komponenten prüfen lässt. Dabei folgen wieder $(\mathbf{p}_A)^2$ und $(\mathbf{p}_B)^2$ aus der Dispersionsrelation für das jeweilige Teilchen. Dann gilt $\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B = -(p_A)^0(p_B)^0 = -m_A E_B$, weil $\vec{p}_A = \vec{0}$ ist. Daher ist Gl. (II.20) äquivalent zu

$$-m_C^2 c^2 = -m_A^2 c^2 - m_B^2 c^2 + 2m_A E_B,$$

woraus sich schließlich

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} c^2 \quad (\text{II.21a})$$

ergibt. Auf ähnlicher Weise gilt

$$E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A} c^2, \quad (\text{II.21b})$$

so dass man sofort die Energieerhaltung $E_B + E_C = m_A c^2$ nachprüfen kann. Mithilfe der Dispersionsrelationen kann man dann $|\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|$ finden.

Literatur zum Kapitel II

- Fließbach, *Mechanik* [4], Kap. IX.
- Greiner, *Klassische Mechanik I* [5] Kap. III.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [6] = *Introduction to Electrodynamics* [7], Kap. 12.2.
- Landau & Lifschitz, *Band II: Klassische Feldtheorie* [8] = *The classical theory of fields* [9], Kap. II.
- Nolting, *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* [10], 1. Teil.
- Scheck, *Mechanik* [11] Kap. 4.

KAPITEL III

Relativistisch kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Die Spezielle Relativitätstheorie wurde gerade entwickelt, um die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in allen Inertialsystemen zu gewährleisten. Dementsprechend ist Elektrodynamik automatisch eine „relativistische“ Theorie, was aber an der üblichen Formulierung der vier Maxwell-Gleichungen oder anderer Grundgleichungen (Abschn. III.1) nicht sofort erkennbar ist.

In diesem Kapitel werden die Gesetze und einige Resultate der Elektrodynamik in relativistisch kovarianter Notation formuliert. Somit werden erstens einige Lorentz-Vierervektoren und -tensoren eingeführt, welche die unterschiedlichen elektrodynamischen Größen darstellen (Abschn. III.2). Diese werden dann in Abschn. III.3 benutzt, um die Grundgleichungen der Elektrodynamik sowie einige daraus abgeleiteten wichtigen Ergebnisse auszudrücken.

III.1 Wiederholung zur nicht-kovarianten Formulierung

In diesem Abschnitt werden der Vollständigkeit halber einige Grundlagen der klassischen Elektrodynamik in nicht-relativistisch-kovarianter Schreibweise dargelegt.

III.1.1 Dynamische Variablen

Bewegte elektrisch geladene Teilchen erzeugen ein elektromagnetisches Feld, das wiederum die Bahnkurven der Teilchen beeinflusst. Zur Beschreibung eines solchen Systems sind die dynamischen Variablen

- elektrische Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r})$;
- elektrische Ladungsstromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r})$.

Für ein System aus Punktladungen mit jeweiligen elektrischen Ladungen q_a , Bahnkurven $\vec{x}_a(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_a(t)$ gilt

$$\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \quad , \quad \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)), \quad (\text{III.1})$$

wobei $\delta^{(3)}$ die dreidimensionale Dirac⁽ⁿ⁾-Distribution bezeichnet;

- elektrisches Feld (bzw. elektrische Feldstärke) $\vec{E}(t, \vec{r})$;
- magnetisches Feld (bzw. magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte) $\vec{B}(t, \vec{r})$.

Bemerkung: Hier ist \vec{r} keine dynamische Variable, sondern nur ein kontinuierlicher Parameter, der die Feldvariablen parametrisiert, genauso wie a die Teilchenvariablen kennzeichnet.

⁽ⁿ⁾P. A. M. DIRAC, 1902–1984

III.1.2 Maxwell–Lorentz-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld (\vec{E}, \vec{B}) im Vakuum in Anwesenheit der durch die Ladungs- bzw. Stromdichte ρ bzw. \vec{j} beschriebenen Quellen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.2a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0 \quad (\text{III.2b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{III.2c})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}). \quad (\text{III.2d})$$

Kombiniert man die Maxwell–Gauß^(o)- und Maxwell–Ampère^(p)-Gleichungen (III.2a), (III.2d) zusammen, so erkennt man, dass die Ladungs- und Stromdichte der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = 0 \quad (\text{III.3})$$

genügen, welche die lokale Formulierung der Erhaltung der elektrischen Ladung darstellt.

Schließlich übt ein elektromagnetisches Feld auf jedes Einheitsvolumen einer Verteilung von elektrischen Ladungen und Strömen eine Kraft aus, die *Lorentz-Kraftdichte*, die durch

$$\vec{f}_{\text{L}}(t, \vec{r}) = \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.4})$$

gegeben wird.

Besteht die Verteilung aus nur einer einzigen Punktladung q mit Geschwindigkeit \vec{v} , so unterliegt die letztere einer *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}_{\text{L}}(t) = q [\vec{E}(t, \vec{x}(t)) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(t, \vec{x}(t))], \quad (\text{III.5})$$

wobei $\vec{x}(t)$ den Ort der Punktladung zur Zeit t bezeichnet.

Aus den Maxwell-Gleichungen (III.2) in Abwesenheit von Quelltermen folgert man die Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung

$$\square \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{0} \quad , \quad \square \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{0}, \quad (\text{III.6})$$

mit den zusätzlichen Bedingungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0$, wobei der *d'Alembert^(q)-Operator* \square gemäß

$$\square \equiv -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad (\text{III.7})$$

definiert ist. Die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen beschreiben *elektromagnetischen Wellen*, deren (Phasen)Geschwindigkeit

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{III.8})$$

beträgt, entsprechend der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

^(o)C. F. GAUSS, 1777–1855 ^(p)A.-M. AMPÈRE, 1775–1836 ^(q)J. LE ROND D'ALEMBERT, 1717–1783

Bemerkung: Offensichtlich werden hier die Größen und Einheiten des SI-Systems benutzt, in dem die *elektrische Feldkonstante* ϵ_0 und die *magnetische Feldkonstante* μ_0 mit einem Wert ungleich 1 auftreten.

III.1.3 Elektromagnetische Potentiale. Eichungen

Die Felder $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$ können durch ein *Skalarpotential* $\Phi(t, \vec{r})$ und ein *Vektorpotential* $\vec{A}(t, \vec{r})$ ausgedrückt werden:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{r})}{\partial t}, \quad (\text{III.9a})$$

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{r}). \quad (\text{III.9b})$$

Dies deutet darauf hin, dass die 6 Komponenten des elektromagnetischen Feldes in jedem Punkt \vec{r} redundant sind, da die Potentiale $\Phi(t, \vec{r})$ und $\vec{A}(t, \vec{r})$ nur 4 reelle Skalare darstellen.

Setzt man diese Identitäten in die Maxwell-Gauß- und Maxwell-Ampère-Gleichungen (III.2a) und (III.2d) ein, so erhält man für die Potentiale die Bewegungsgleichungen

$$\Delta\Phi(t, \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.10a})$$

oder äquivalent

$$\square\Phi(t, \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r})\right], \quad (\text{III.10b})$$

und

$$\square\vec{A}(t, \vec{r}) = -\mu_0\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) + \vec{\nabla}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r})\right]. \quad (\text{III.10c})$$

Eichinvarianz

Die Maxwell-Felder $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r})$ und dadurch die Elektrodynamik bleiben invariant unter einer *Eichtransformation* der Potentiale

$$\Phi(t, \vec{r}) \rightarrow \Phi'(t, \vec{r}) \equiv \Phi(t, \vec{r}) - \frac{\partial\chi(t, \vec{r})}{\partial t}, \quad (\text{III.11a})$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) \rightarrow \vec{A}'(t, \vec{r}) \equiv \vec{A}(t, \vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t, \vec{r}) \quad (\text{III.11b})$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(t, \vec{r})$ von Zeit und Ort. Somit kann man $\chi(t, \vec{r})$ so wählen, dass die Gleichungen für die Potentiale irgendeine Symmetrie besitzen oder einfacher werden.

Zwei oft benutzte Eichungen sind die *Lorenz^(r)-Eichung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t, \vec{r})}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.12})$$

und — insbesondere in der Elektrostatik — die *Coulomb^(s)-Eichung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) = 0. \quad (\text{III.13})$$

Insbesondere vereinfachen sich in der Lorenz-Eichung die Gl. (III.10b) und (III.10c), die dann eine symmetrische Form annehmen.

^(r)L. LORENZ, 1829–1891 ^(s)C. A. COULOMB, 1736?1806

III.1.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Die Dichte und Stromdichte der Energie bzw. des Impulses des elektromagnetischen Feldes sind gegeben durch

- Energiedichte des Feldes:
$$e_{\text{e.m.}}(t, \vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\vec{E}(t, \vec{r})^2 + c^2 \vec{B}(t, \vec{r})^2 \right] \quad (\text{III.14a})$$

- Energiestromdichte (*Poynting*^(t)-Vektor):
$$\vec{S}_{\text{e.m.}}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.14b})$$

- Impulsdichte:
$$\vec{g}_{\text{e.m.}}(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.14c})$$

- Impulsstromdichte:

$$T_{\text{e.m.}}^{ij}(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\vec{E}(t, \vec{r})^2 + c^2 \vec{B}(t, \vec{r})^2 \right) - E^i(t, \vec{r}) E^j(t, \vec{r}) - c^2 B^i(t, \vec{r}) B^j(t, \vec{r}) \right]. \quad (\text{III.14d})$$

$T_{\text{e.m.}}^{ij}$ stellt die Dichte des Stroms in Richtung i von der j -ten Komponenten des Impulses des elektromagnetischen Feldes dar.

Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen zeigt man, dass diese Dichten die Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial e_{\text{e.m.}}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_{\text{e.m.}}(t, \vec{r}) = -\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \quad (\text{III.15a})$$

und

$$\frac{\partial g_{\text{e.m.}}^j(t, \vec{r})}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{\text{e.m.}}^{ij}(t, \vec{r})}{\partial x^i} = -f_{\text{L}}^j(t, \vec{r}) \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.15b})$$

erfüllen, welche jeweils die lokale Änderung der Energie- und Impulsdichte des Feldes beschreiben.

Bemerkung: Der Tensor mit kartesischen Komponenten T_{em}^{ij} wird auch *Maxwell'scher Spannungstensor* des elektromagnetischen Feldes genannt.⁽¹⁶⁾

III.2 Lorentz-kovariante elektromagnetische Größen

Zur Formulierung der Elektrodynamik in relativistisch kovarianter Notation sollen zuerst passende Lorentz-kovariante Größen — Viererskalare, -vektoren oder -tensoren — definiert werden, welche das elektromagnetische Feld (§ III.2.1) mit den zugehörigen Potentialen (§ III.2.2), dessen Quellen (§ III.2.3), sowie dessen Energie und Impuls (§ III.2.4) beschreiben.

Hiernach bezeichnet x einen Punkt der Raumzeit mit kontravarianten Koordinaten x^μ .

III.2.1 Elektromagnetischer Feldstärketensor

In relativistisch kovarianter Schreibweise gewinnt die Bezeichnung „elektromagnetisches Feld“ ihre volle Bedeutung, indem die elektrische und magnetische Dreiervektorfelder miteinander in ein einzelnes mathematisches Objekt kombiniert werden.

⁽¹⁶⁾ Der Maxwell'sche Spannungstensor $\sigma_{\text{e.m.}}$ wird auch mit der umgekehrten Vorzeichenkonvention definiert, d.h.

$$\sigma_{\text{e.m.}} = -\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$$

^(t)J. H. POYNTING, 1852–1914

III.2.1 a Definition

Um eine relativistisch kovariante Größe zu erhalten, werden das elektrische und das magnetische Feld \vec{E} und \vec{B} zum *elektromagnetischen Feldstärketensor* zweiter Stufe \mathbf{F} kombiniert. Letzterer kann durch die Angabe seiner kontravarianten Komponenten

$$\begin{aligned} F^{00}(\mathbf{x}) &= F^{ii}(\mathbf{x}) = 0, \\ F^{0i}(\mathbf{x}) &= -F^{i0}(\mathbf{x}) \equiv \frac{E^i(\mathbf{x})}{c}, \\ F^{ij}(\mathbf{x}) &= -F^{ji}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=1}^3 \epsilon^{ijk} B^k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{III.16a})$$

bezüglich eines gegebenen Inertialsystems \mathcal{B} definiert werden. Dabei sind $i, j \in \{1, 2, 3\}$, während ϵ^{ijk} das dreidimensionale völlig antisymmetrische Levi-Civita-Symbol bezeichnet. Die Komponenten E^i, B^j der Felder \vec{E} und \vec{B} sind solche, die ein bezüglich \mathcal{B} ruhender Beobachter messen würde.

Die Matrixdarstellung des elektromagnetischen Feldstärketensors \mathbf{F} lautet

$$F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1(\mathbf{x})}{c} & \frac{E^2(\mathbf{x})}{c} & \frac{E^3(\mathbf{x})}{c} \\ -\frac{E^1(\mathbf{x})}{c} & 0 & B^3(\mathbf{x}) & -B^2(\mathbf{x}) \\ -\frac{E^2(\mathbf{x})}{c} & -B^3(\mathbf{x}) & 0 & B^1(\mathbf{x}) \\ -\frac{E^3(\mathbf{x})}{c} & B^2(\mathbf{x}) & -B^1(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.16b})$$

wobei der erste bzw. zweite Index des Tensors dem Zeilen- bzw. Spaltenindex der Matrix entspricht. $F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ ist offensichtlich antisymmetrisch unter dem Austausch der zwei Indizes

$$F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -F^{\nu\mu}(\mathbf{x}) \quad \forall \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{III.17})$$

Unter Lorentz-Transformationen $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^\mu$ zwischen Inertialsystemen bzw. Minkowski-Koordinaten transformiert sich der Feldstärketensor wie jeder Tensor vom Typ $\binom{2}{0}$, d.h. gemäß

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} F^{\mu\nu}.$$

Daraus kann man die entsprechenden Transformationen für die Felder \vec{E} und \vec{B} folgern.

Für einen drehungsfreien Boost (§ I.2.2 b) mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}$ findet man

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= (\vec{e} \cdot \vec{E}) \vec{e} + \frac{\vec{e} \times (\vec{E} \times \vec{e}) - \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \\ \vec{B}' &= (\vec{e} \cdot \vec{B}) \vec{e} + \frac{\vec{e} \times (\vec{B} \times \vec{e}) + \vec{v} \times \vec{E}/c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \end{aligned}$$

wobei \vec{e} den Einheitsvektor in Richtung des Boosts bezeichnet.

Sei $\mathbf{u} = \{u^\mu\}_{\mu=0\dots3}$ die Vierergeschwindigkeit eines Beobachters \mathcal{B}' relativ zum Inertialsystem \mathcal{B} . Man kann Vierervektoren $\mathbf{E}_u(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}_u(\mathbf{x})$ durch die Angabe ihrer jeweiligen kontravarianten Komponenten

$$E_u^\mu(\mathbf{x}) \equiv F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) u_\nu \quad (\text{III.18a})$$

$$B_u^\mu(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2c} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu F_{\rho\sigma}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.18b})$$

bezüglich \mathcal{B} definieren, wobei $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ den vierdimensionalen Levi-Civita-Tensor (I.57) bezeichnet. Falls \mathcal{B}' in \mathcal{B} ruht — d.h. $u^0 = -u_0 = 1$ und $u^i = 0$ für $i = 1, 2, 3$ —, dann sind die räumlichen Komponenten der entsprechenden Vierervektoren $E_0(\mathbf{x})$ bzw. $B_0(\mathbf{x})$ gleich den Komponenten in \mathcal{B} der Dreiervektoren $\vec{E}(\mathbf{x})$ bzw. $\vec{B}(\mathbf{x})$, während die 0-Komponenten von $E_0(\mathbf{x})$ und $B_0(\mathbf{x})$ Null sind. Allgemeiner stellt $E_u(\mathbf{x})$ bzw. $B_u(\mathbf{x})$ das elektrische bzw. magnetische Feld relativ zum Ruhesystem des Beobachters \mathcal{B}' dar, wie es vom Bezugssystem \mathcal{B} aus gesehen aussieht.

III.2.1 b Dualer Feldstärketensor

Mithilfe des vierdimensionalen Levi-Civita-Tensors definiert man noch den *dualen elektromagnetischen Feldstärketensor* $\tilde{\mathbf{F}}$, dessen kontravariante Komponenten durch

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.19a})$$

definiert sind. In Matrixdarstellung ergibt sich⁽¹⁷⁾

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & B^1(\mathbf{x}) & B^2(\mathbf{x}) & B^3(\mathbf{x}) \\ -B^1(\mathbf{x}) & 0 & -\frac{E^3(\mathbf{x})}{c} & \frac{E^2(\mathbf{x})}{c} \\ -B^2(\mathbf{x}) & \frac{E^3(\mathbf{x})}{c} & 0 & -\frac{E^1(\mathbf{x})}{c} \\ -B^3(\mathbf{x}) & -\frac{E^2(\mathbf{x})}{c} & \frac{E^1(\mathbf{x})}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.19b})$$

Relativ zu den Komponenten $F^{\mu\nu}$ von \mathbf{F} folgen die $\tilde{F}^{\mu\nu}$ aus den Substitutionen $E^i/c \rightarrow B^i$ und $B^i \rightarrow -E^i/c$.

Der duale Feldstärketensor ist deutlich antisymmetrisch.

Bemerkungen:

* Die Komponenten des in Gl. (III.18) eingeführten Vierervektors $B_u(\mathbf{x})$ lassen sich einfacher als

$$B_u^\mu(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{c}\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x})u_\nu$$

schreiben. Wiederum gilt $E_u^\mu(\mathbf{x}) \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}u_\nu\tilde{F}_{\rho\sigma}(\mathbf{x})$.

* Der „biduale“ Feldstärketensor mit Komponenten $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}$ ist einfach $-\mathbf{F}$.

III.2.1 c Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Aus dem Feldstärketensor (III.16) und seinem Dual (III.19) lassen sich durch Kontraktionen zwei unabhängige Größen finden, die sich unter Transformationen zwischen Inertialsystemen nicht ändern, d.h. zwei Lorentz-Skalaren, und zwar

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 2\left[\vec{B}(\mathbf{x})^2 - \frac{\vec{E}(\mathbf{x})^2}{c^2}\right] \quad (\text{III.20a})$$

und

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -4\frac{\vec{E}(\mathbf{x}) \cdot \vec{B}(\mathbf{x})}{c}. \quad (\text{III.20b})$$

Die dritte natürliche Möglichkeit $\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ ist nicht unabhängig von den zwei ersten, sondern gleich $-F_{\mu\nu}(\mathbf{x})F^{\mu\nu}(\mathbf{x})$.

⁽¹⁷⁾Dabei muss die Leserin darauf aufpassen, dass numerisch $F_{0i} = -F_{i0} = -F^{0i} = -E^i/c$ und $F_{ij} = F^{ij}$ gelten, wie sich aus $F_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}$ berechnen lässt.

III.2.2 Viererpotential

Das Skalarpotential Φ und das Vektorpotential \vec{A} bilden einen Vierervektor, das *Viererpotential*, mit den kontravarianten Komponenten

$$A(x) = \begin{pmatrix} \Phi(x) \\ c \\ \vec{A}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.21})$$

Der elektromagnetische Feldstärketensor (III.16) lässt sich dadurch ausdrücken gemäß

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (\text{III.22})$$

wobei $\partial^\mu \equiv \partial / \partial x_\mu$, d.h. $\partial^0 = -(1/c)\partial / \partial t$ während ∂^i die i -te Komponente des Gradienten ist. Dementsprechend stellen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{E^i}{c} &= F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\Phi}{c} \right) \\ B^i &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} F^{jk} = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \partial^j A^k = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \end{aligned}$$

jeweils die i -te Komponente der Gleichung (III.9a) und (III.9b) dar.

Eichinvarianz

In relativistisch kovarianter Schreibweise lautet die Eichtransformation (III.11)

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x), \quad (\text{III.23})$$

mit einer zweimal kontinuierlich differenzierbaren skalaren Funktion $\chi(x)$. Für solche Funktionen gilt $\partial^\mu \partial^\nu \chi(x) = \partial^\nu \partial^\mu \chi(x)$, so dass die Viererpotentiale A und A' über Beziehung (III.22) zum gleichen Feldstärketensor F führen, wie zu erwarten war.

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ [Gl. (III.8)] wird die Bedingung (III.12), welche die Lorenz-Eichung definiert, zu

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (\text{III.24})$$

Dabei ist deutlich, dass diese Eichbedingung Lorentz-invariant ist, d.h. sie bleibt in allen Inertialsystemen erfüllt. Dagegen gilt diese Eigenschaft nicht für die Coulomb-Eichbedingung (III.13), für die es keine Lorentz-kovariante Formulierung gibt.

III.2.3 Elektrischer Viererstrom

Die elektrischen Ladungs- und Stromdichte bilden einen Vierervektor $J_{\text{el.}}(x)$, der als *elektrischer Viererstrom* bzw. *Viererstromdichte* — was genauer ist — bezeichnet wird:

$$J_{\text{el.}}(x) = \begin{pmatrix} \rho_{\text{el.}}(x)c \\ \vec{j}_{\text{el.}}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.25a})$$

Komponentenweise entspricht dies

$$J_{\text{el.}}^0(x) = \rho_{\text{el.}}(x)c, \quad J_{\text{el.}}^i(x) = j_{\text{el.}}^i(x) \text{ für } i = 1, 2, 3. \quad (\text{III.25b})$$

Dabei bezeichnen $\rho_{\text{el.}}$ und $\vec{j}_{\text{el.}}$ die bekannten „nicht-relativistischen“ Größen in einem festen Bezugssystem, relativ zu dem sich die Ladungen möglicherweise bewegen.

Für eine Punktladung q mit Weltlinie bzw. Vierergeschwindigkeit $(t, \vec{x}(t))$ bzw. $u = dx/d\tau$, mit der Eigenzeit τ der Punktladung, gilt

$$J_{\text{el.}}(\mathbf{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}(t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varrho_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (\text{III.26a})$$

wobei $\varrho_0(\mathbf{x})$ die Ladungsdichte im Ruhesystem der Punktladung bezeichnet. Unter Berücksichtigung des Ausdrucks (I.38) der Vierergeschwindigkeit lautet dies noch

$$J_{\text{el.}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varrho_0(\mathbf{x})\gamma c \\ \varrho_0(\mathbf{x})\gamma \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{III.26b})$$

mit dem Lorentz-Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$.

III.2.4 Energieimpulstensor

Die Energiedichte $e_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14a)], der Poynting-Vektor $\vec{S}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14b)], die Impulsdichte $\vec{g}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14c)] und die Impulsstromdichte $\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14d)] des elektromagnetischen Feldes lassen sich in einen Vierertensor zweiter Stufe $\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$, den *Energieimpulstensor* des Feldes, kombinieren. In Matrixdarstellung lautet dieser

$$T_{\text{e.m.}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} e_{\text{e.m.}}(\mathbf{x}) & c\vec{g}_{\text{e.m.}}(\mathbf{x}) \\ \hline \frac{\vec{S}_{\text{e.m.}}(\mathbf{x})}{c} & \mathbf{T}_{\text{e.m.}}(\mathbf{x}) \end{array} \right). \quad (\text{III.27a})$$

Der Energieimpulstensor lässt sich auch durch den Feldstärketensor (III.16) ausdrücken, und zwar komponentenweise

$$T_{\text{e.m.}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^\mu{}_\rho(\mathbf{x}) F^{\rho\nu}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(\mathbf{x}) F^{\rho\sigma}(\mathbf{x}) \right], \quad (\text{III.27b})$$

mit $\eta^{\mu\nu}$ den Komponenten des inversen metrischen Tensors. In dieser Form prüft man einfach, dass der Energieimpulstensor symmetrisch ist.

III.3 Relativistisch kovariante Formulierung der Grundgesetze

Anhand der in Abschn. III.2 eingeführten Darstellungen der elektrodynamischen Größen lassen sich die Maxwell-Gleichungen (§ III.3.1), die Kontinuitätsgleichung (§ III.3.2), die Lorentz-Kraftdichte (§ III.3.3) und die Energie- und Impulsbilanz (§ III.3.4) in relativistisch kovarianter Form schreiben.

III.3.1 Maxwell-Gleichungen

Unter Verwendung des elektromagnetischen Feldstärketensors (III.16) und des elektrischen Viererstroms (III.25) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \mu_0 J_{\text{el.}}^\mu(\mathbf{x}) \quad \forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (\text{III.28a})$$

$$\partial^\mu F^{\nu\rho}(\mathbf{x}) + \partial^\nu F^{\rho\mu}(\mathbf{x}) + \partial^\rho F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mu, \nu, \rho \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (\text{III.28b})$$

Dabei stellen die Gl. (III.28a) mit einem Quellterm die inhomogenen Maxwell-Gauß- und Maxwell-Ampère-Gleichungen (III.2a) und (III.2d) dar.

Wiederum stehen die Gl. (III.28b) — wobei eigentlich nur die vier Fälle $(\mu, \nu, \rho) = (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3)$ und $(1, 2, 3)$ unterschiedlich sind — für die homogenen Maxwell-Gleichungen (III.2b) und (III.2c). Unter Verwendung des dualen elektromagnetischen Feldstärketensors (III.19) lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen noch als

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{III.28c})$$

umschreiben. In dieser Form ist sofort klar, dass es nur vier Gleichungen gibt.

III.3.2 Kontinuitätsgleichung

Ausgedrückt durch den elektrischen Viererstrom (III.25) lautet die Kontinuitätsgleichung (III.3)

$$\partial_\mu J_{\text{el.}}^\mu(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{III.29})$$

Diese Bilanzgleichung lässt sich auch direkt aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen herleiten: somit lautet die Viererdivergenz der Gl. (III.28a)

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \mu_0 \partial_\mu J_{\text{el.}}^\mu(\mathbf{x}).$$

Dabei sind auf der linken Seite $\partial_\mu \partial_\nu$ symmetrisch und $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch unter dem Austausch von μ und ν , so dass die zweifache Kontraktion $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ automatisch Null ist, entsprechend Gl. (III.29).

III.3.3 Lorentz-Kraft und -Kraftdichte

Das elektromagnetische Feld übt auf eine elektrische Ladungs- und Stromverteilung eine Lorentz-Kraftdichte \vec{f}_L [Gl. (III.4)] aus. Mit dieser kann man eine Viererkraftdichte f_L assoziieren, die sich durch den elektromagnetischen Feldstärketensor (III.16) und den elektrischen Viererstrom (III.25) ausdrücken lässt. Komponentenweise gilt

$$f_L^\nu(\mathbf{x}) = J_{\text{el.},\mu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (\text{III.30a})$$

Mit den expliziten Ausdrücken des Feldstärketensors und des Viererstroms prüft man nämlich schnell, dass die räumlichen Komponenten

$$f_L^i(\mathbf{x}) = \rho_{\text{el.}}(\mathbf{x}) E^i(\mathbf{x}) + \sum_{k,l=1}^3 \epsilon^{ikl} j_{\text{el.}}^k(\mathbf{x}) B^l(\mathbf{x}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.30b})$$

betragen. Wiederum lautet die zeitliche Komponente

$$f_L^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{el.}}(\mathbf{x}) \cdot \vec{E}(\mathbf{x}). \quad (\text{III.30c})$$

Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Im Fall einer Punktladung q mit Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$, entsprechend dem elektrischen Viererstrom (III.26a), kann die Lorentz-Kraftdichte sofort über die Ortskoordinaten integriert werden. Daraus ergibt sich die Lorentz-Viererkraft

$$F_L^\nu = q u_\mu F^{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (\text{III.31})$$

Mit dieser Viererkraft lautet die relativistisch kovariante Verallgemeinerung (II.14) des zweiten newtonschen Gesetzes

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = q u_\mu F^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.32})$$

wobei $\tau = t/\gamma$ bzw. $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ die Eigenzeit bzw. den (kinetischen) Viererimpuls der Punktladung bezeichnet.

Die zeitliche Komponente der Gl. (III.31) lautet

$$\frac{dp^0}{d\tau} = q\gamma \vec{v} \cdot \vec{E}/c, \quad \text{d.h.} \quad \frac{d(p^0 c)}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v};$$

auf der linken Seite steht die Rate der zeitlichen Änderung von der Energie $p^0 c$ der Punktladung; auf der rechten, die instantane Leistung der Lorentz-Kraft.

Bemerkung: Die Lorentz-Viererkraft (III.31) ist „orthogonal“ zur Vierergeschwindigkeit, $u_\nu F_L^\nu = 0$.

Dies folgt aus der Antisymmetrie des elektromagnetischen Feldstärketensors und der Symmetrie des Produkts $u_\nu u_\mu$.

III.3.4 Energie- und Impulsbilanzgleichungen

Schließlich lassen sich die lokalen Bilanzgleichungen (III.15a) und (III.15b) für die Energie und den Impuls des elektromagnetischen Feldes unter Verwendung des Energieimpulstensors (III.27) und der Lorentz-Viererkraftdichte (III.30a) in der kompakten Form

$$\partial_\mu T_{\text{e.m.}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -f_L^\nu(\mathbf{x}) \quad (\text{III.33})$$

ausdrücken.

III.4 Weitere Resultate in relativistisch kovarianter Form

III.4.1 Bewegungsgleichung für das Viererpotential

Setzt man den Ausdruck (III.22) des Feldstärketensors durch das Viererpotential in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (III.28a) ein, so findet man

$$\partial_\nu \partial^\mu A^\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 J_{\text{el.}}^\mu(\mathbf{x}).$$

Dabei ist $\partial_\nu \partial^\nu$ gerade der d'Alembert-Operator \square [Gl. (III.7)], so dass sich diese Gleichung als

$$\square A^\mu(\mathbf{x}) = -\mu_0 J_{\text{el.}}^\mu(\mathbf{x}) + \partial^\mu [\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x})] \quad \forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{III.34})$$

umschreiben lässt. Dies stellt die Bewegungsgleichung für das Viererpotential $A(\mathbf{x})$ dar. Die Komponente $\nu = 0$ ist äquivalent zur Bewegungsgleichungen (III.10b) des Skalarpotentials, die räumlichen Komponenten entsprechen der Gl. (III.10c) für das Vektorpotential.

Bemerkung: Aus der Beziehung (III.22) folgt

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(\mathbf{x}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma(\mathbf{x}),$$

woraus die homogene Gleichung $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma(\mathbf{x}) = 0$ sofort folgt, da $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch und $\partial_\mu \partial_\rho$ symmetrisch unter dem Austausch von μ und ρ ist.

III.4.2 Klassische Wellengleichung und ebene Wellen

In Abwesenheit von äußeren Quellen des Feldes und in der Lorenz-Eichung $\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}) = 0$ wird die Bewegungsgleichung (III.34) zur klassischen Wellengleichung

$$\square A^\mu(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{III.35a})$$

oder äquivalent, in geometrischer Form

$$\square A(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{III.35b})$$

Eine ebene Welle ist eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung der Form

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \varepsilon^\mu f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t) \quad (\text{III.36a})$$

wobei die Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}}$ und der Wellenvektor \vec{k} die *Dispersionsrelation* $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ erfüllen. Dabei gibt \vec{k} die Propagationsrichtung an, während ε^μ die Komponente eines *Polarisationsvierervektors* ε ist. Definiert man einen (lichtartigen) Vierervektor $\mathbf{k} = (k^0 \equiv \omega_{\vec{k}}/c, \vec{k})$, so lässt sich diese Lösung als

$$A^\mu(\mathbf{x}) = \varepsilon^\mu f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (\text{III.36b})$$

schreiben, oder auch geometrisch

$$A(\mathbf{x}) = \varepsilon f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{III.36c})$$

Wegen der Lorenz-Eichbedingung (III.24) sollen ε und \mathbf{k} im Allgemeinen orthogonal zueinander sein, $\mathbf{k} \cdot \varepsilon = 0$. In einem Bezugssystem, wo A^0 verschwindet,⁽¹⁸⁾ gilt automatisch $\varepsilon^0 = 0$ — woraus man erkennt, dass der Polarisationsvierervektor raumartig ist, $\varepsilon^2 = \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu > 0$. In diesem Bezugssystem gilt somit $\mathbf{k} \cdot \varepsilon = \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$: man findet die Transversalität des (Dreier-)Polarisationsvektors wieder.

Literatur zum Kapitel III

- Feynman, *Vorlesungen über Physik. Band 2* [12] = *Lectures on Physics. Vol. II* [13] Kap. 25, 26 & 31.8
- Fließbach, *Elektrodynamik* [14] Teil IV Kap. 18 & Teil V Kap. 22
- Greiner, *Klassische Elektrodynamik* [15] Teil IV Kap. 22.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [6] = *Introduction to Electrodynamics* [7] Kap. 12.3
- Landau & Lifschitz, *Klassische Feldtheorie* [8] = *The classical theory of fields* [9] Kap. III § 16–18 & 23–25.
- Nolting, *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* [10] Erster Teil, Kap. 2.3.
- Scheck, *Klassische Feldtheorie* [16] Kap. 2.2.

⁽¹⁸⁾Diese Bedingung definiert die *temporale Weyl^(u)-Eichung*, die hier, kombiniert mit der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, äquivalent zur Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ist.

^(u)H. WEYL, 1885–1955

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) **17** (1905) 891–921.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik. Band 1: Mechanik, Strahlung, Wärme*, 5. Aufl. (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2007).
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics. Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, definitive Aufl. (Addison-Wesley, Reading, MA, 2005).
- [4] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik I. Mechanik*, 7. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2015).
- [5] W. Greiner, *Klassische Mechanik I*, 8. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007).
- [6] D. J. Griffiths, *Elektrodynamik*, 3. Aufl. (Pearson, München, 2011).
- [7] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Aufl. (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999).
- [8] L. Landau, E. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band II: Klassische Feldtheorie*, 12. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997).
- [9] L. Landau, E. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 2: The classical theory of fields*, 4th Aufl. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).
- [10] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik. Band 4: Spezielle Relativitätstheorie. Thermodynamik*, 6. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2005).
- [11] F. Scheck, *Theoretische Physik 1: Mechanik*, 8. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2007).
- [12] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik. Band 2: Elektromagnetismus und Struktur der Materie*, 5. Aufl. (Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2007).
- [13] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics. Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter*, definitive Aufl. (Addison-Wesley, Reading, MA, 2005).
- [14] T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik II. Elektrodynamik*, 6. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2012).
- [15] W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik*, 7. Aufl. (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008).
- [16] F. Scheck, *Theoretische Physik 3: Klassische Feldtheorie*, 2. Aufl. (Springer, Berlin & Heidelberg, 2006).

