Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalischen Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Elektromagnetismus in relativistisch kovarianter Schreibweise (30 P.)

i. Vorbereitung

a) Wie lautet die Transformation der Raumzeitkoordinaten für einen Lorentz-Boost in z-Richtung? Definieren Sie die dabei auftretenden Größen.

b) Wie ist das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes definiert? Wie kann der zugehörige Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dadurch ausgedrückt werden? Erläutern Sie die dabei auftretenden Symbole.

ii. Seien

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 B \\ \frac{1}{2}x^1 B \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

die Koordinaten des Viererpotentials eines elektromagnetischen Feldes bezüglich eines Inertialsystems $\mathcal{B}$ mit Raumzeitkoordinaten x^μ, wobei B eine Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Komponenten $F^{\mu\nu}$ des zugehörigen Feldstärketensors. Geben Sie das elektrische und das magnetische Feld an.

b) Bestimmen Sie die Viererdivergenz des Viererpotentials (1).

c) Ein Inertialsystem $\mathcal{B}'$ bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ entlang der x^3-Richtung relativ zu $\mathcal{B}$. Wie lauten die Komponenten $F^{\mu'\nu'}$ des Feldstärketensors in $\mathcal{B}'$? Geben Sie auch das elektrische und das magnetische Feld in $\mathcal{B}'$ an.

2. Wellenmechanik (30 P.)

i. Vorbereitung

a) Wie lautet die zeitabhängige Schrödinger-Wellengleichung für die Bewegung in drei Raumdimensionen eines Teilchens mit Masse m in Anwesenheit eines Potentials $V(\vec{r})$.

b) Was nennt man „stationäre Schrödinger-Gleichung“? Was bestimmt man mit deren Hilfe?

c) Wie erhält man, ausgehend von einer Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung?

ii. Bewegung eines Teilchens in einer Raumdimension

Ziel dieser Aufgabe ist, die Streuzustände der stationären eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m im Potential („Potentialstufe“)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

zu bestimmen. Sei $E > 0$ die Energie des Teilchens.

a) Wie lautet die stationäre Schrödinger-Gleichung in diesem Fall? Welche Bedingungen muss eine Lösung davon im Punkt $x = 0$ erfüllen?

b) Sei zuerst $0 < E < V_0$. Bestimmen Sie die entsprechende Lösung $\psi_E(x)$ der stationären Schrödinger-Gleichung. Diskutieren Sie insbesondere das Verhalten im Bereich $x \geq 0$.

Hinweis: Führen Sie die Notationen $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa \equiv \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ ein. $\psi_E(x)$ sollte von diesen Zahlen sowie von einer unbestimmten Konstanten $A \in \mathbb{C}$ abhängen.

c) Sei nun $E \geq V_0$. Bestimmen Sie die entsprechende Lösung $\psi_E(x)$ der stationären Schrödinger-Gleichung. Definieren Sie und berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T für die Streuung an dieser Potentialstufe. Wie verhält sich T im Limes $E \to \infty$?

Hinweis: Führen Sie die Notation $k' \equiv \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ ein.

3. Teilchen in einem kugelsymmetrischen Kastenpotential **(30 P.)**

Ein Teilchen mit Masse m befinde sich im (unendlich hohen) kugelsymmetrischen Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } \; r \leq r_0 \\ \infty & \text{für } \; r > r_0 \end{cases} \tag{3}$$

mit $V_0 > 0$, $r_0 > 0$ und $r \equiv |\vec{r}|$. Unter Nutzung von Kugelkoordinaten (r, θ, φ) führt das Einsetzen des Ansatzes $\psi_E(\vec{r}) = R(r)\, Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ in die stationäre Schrödinger-Wellengleichung zur Radialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big[rR(r)\big] + \left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)\right]R(r) = ER(r). \tag{4}$$

In dieser Aufgabe werden Sie die Energien und Eigenfunktionen der stationären Zustände mit $\ell = 0$ bestimmen. Wegen des unendlich hohen Potentials für $r > r_0$ müssen die Eigenfunktionen dort Null sein.

i. Drücken Sie die Radialgleichung (4) mit $\ell = 0$ und dem Potential (3) durch $k \equiv \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$ aus. Welche Bedingungen soll eine physikalisch akzeptable Lösung $R(r)$ erfüllen?

Hinweis: Es gibt eine Bedingung bei $r = 0$ (denken Sie an das Wasserstoffatom!).

ii. Welcher einfacheren Differentialgleichung genügt $u(r) \equiv rR(r)$ für $r \leq r_0$? Die mathematischen Lösungen für $u(r)$ hängen von zwei Konstanten und der (Wellen-)Zahl k ab. Wie schränken die Bedingungen aus **i.** diese Lösungen ein?

iii. Geben Sie die gesuchten Eigenenergien $E_{n,0}$, die von einer Quantenzahl $n \in \mathbb{N}^*$ abhängen sollen, und die zugehörigen Radialfunktionen $R_{n,0}(r)$ (bis auf eine Normierungskonstante) an.

iv. Bestimmen Sie die noch fehlenden Normierungskonstanten.

Hinweis: $Y_{00}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

4. Addition und Kopplung von Drehimpulsen **(25 P.)**

i. Vorbereitung

a) Welche Vertauschungsrelationen erfüllen die Komponenten $\hat{J}_i$ eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$?

b) Seien $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den jeweiligen Spins j_1 und j_2 und sei $\hat{\vec{J}} \equiv \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$ der Gesamtspin-Operator des aus den zwei Teilchen bestehenden Systems.

Was sind die Eigenwerte von $\hat{\vec{J}}^2$? Mit welchem Entartungsgrad kommen sie vor?

ii. Seien $\hat{\vec{J}}^{(1)}$, $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(3)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den jeweiligen Spins $j_1 = j_2 = j_3 = 1$. Ihre Wechselwirkung werde durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

$$\hat{H} = -\frac{2g}{\hbar^2}\left(\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)} + \hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(3)} + \hat{\vec{J}}^{(2)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(3)}\right) \tag{5}$$

mit einer reellen Konstante g. Die anderen Freiheitsgrade der Teilchen werden ignoriert.

Bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenwerte und geben Sie den Entartungsgrad der verschiedenen Energieniveaus an.

Hinweis: Zur Berechnung der Entartung ist eine Betrachtung der Kopplungsmöglichkeiten hilfreich.

5. Harmonische Oszillatoren und Störungsrechnung **(25 P.)**

i. Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator ($V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$) mit Energie-Eigenzuständen $\{|n\rangle\}$.

a) Geben Sie den Kommutator $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ der zugehörigen Ab- und Aufsteigeoperatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$.

b) Drücken Sie $\hat{a}|n\rangle$ und $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ durch $|n-1\rangle$ bzw. $|n+1\rangle$ aus.

Hinweis: Falls Sie die Normierungsfaktoren vergessen haben, gilt $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$.

c) Folgern Sie daraus den Erwartungswert $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$, wobei $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$.

ii. Sei nun

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_2^2 \tag{6}$$

der Hamilton-Operator für ein System aus zwei identischen eindimensionalen harmonischen Operatoren.

a) Geben Sie das Energiespektrum des Systems mit dem Entartungsgrad der Energieniveaus an.

b) Das System wird dadurch gestört, indem die Oszillatoren miteinander durch einen Term $\hat{W} = \lambda\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gekoppelt werden.

Bestimmen Sie die Korrektur erster Ordnung (in λ) für die Energie des Grundzustands.

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus **i.c)**.

Es können 140 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$