1. Elektromagnetismus in relativistisch kovarianter Schreibweise (30 P.)

i. Vorbereitung (13 P.)

a) **(5 P.)** Die Transformation der Raumzeitkoordinaten für einen Lorentz-Boost mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der z-Richtung lautet

$$t \to t' = \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right), \quad x \to x' = x, \quad y \to y' = y, \quad z \to z' = \gamma(t - vt) \quad \text{mit } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1}$$

γ heißt Lorentz-Faktor.

b) **(8 P.)** Das Viererpotential ist das Vierervektor mit (kontravarianten) Koordinaten

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei Φ bzw. $\vec{A}$ das Skalar- bzw. Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes ist.

Der zugehörige Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ wird durch

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3}$$

definiert. Die ∂^μ sind die partiellen Ableitungen nach den kovarianten Koordinaten x_μ:

$$\partial^0 = \eta^{00}\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial^1 = \eta^{11}\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \partial^2 = \eta^{22}\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \partial^3 = \eta^{33}\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3},$$

wobei der (inverse) metrische Tensor $\eta^{\mu\nu}$ durch $\operatorname{diag}(-1, +1, +1, +1)$ definiert ist.

ii. (17 P.)

a) **(8 P.)** Dem Viererpotential

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 B \\ \frac{1}{2}x^1 B \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

entsprechen laut Gl. (3) die folgenden Komponenten des Feldstärketensors:

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} \quad \text{(wie immer)};$$

$$F^{01} = F^{02} = F^{03} = 0 \tag{5a}$$

und $F^{i0} = -F^{0i} = 0$ für $i = 1, 2, 3$;

$$F^{12} = -F^{21} = B \quad , \quad F^{13} = F^{23} = 0 \tag{5b}$$

und noch $F^{31} = F^{32} = 0$.

Aus Gl. (5a) folgt $\vec{E} = \vec{0}$, während Gl. (5b) das magnetische Feld $\vec{B} = B\,\vec{e}_3$ angibt.

b) **(3 P.)** Die Viererdivergenz des Viererpotentials (4) ist

$$\partial_\mu A^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = 0. \tag{6}$$

Dies ist gerade die Lorenz-Eichbedingung.

c) **(6 P.)** Die Koordinatentransformation von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist die gleiche wie in der Frage **i.**, d.h. $x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu x^\mu$ mit

$$\Lambda^{\mu'}{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \ , \ \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die Komponenten des Feldstärketensors in $\mathcal{B}'$ sind dann $F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}F^{\mu\nu}$, und die Berechnung ergibt $F^{1'2'} = -F^{2'1'} = B$ und alle andere $F^{\mu'\nu'} = 0$. Somit sind die elektrische und magnetische Felder in $\mathcal{B}'$ die gleiche wie in $\mathcal{B}$.

2. Wellenmechanik (30 P.)

i. Vorbereitung (8 P.)

a) **(3 P.)** Die zeitabhängige Schrödinger-Wellengleichung ist

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(t,\vec{r}), \tag{7}$$

wobei $\psi(t,\vec{r})$ die Wellenfunktion des Teilchens ist. Dabei stellt die rechte Seite die Wirkung des Hamilton-Operators $\hat{H}$ auf $\psi(t,\vec{r})$ dar.

b) **(3 P.)** Die entsprechende stationäre Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_E(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi_E(\vec{r}) = E\psi_E(\vec{r}) \tag{8}$$

ist die Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator $\hat{H}$. Die Lösungen dieser Gleichung, bestehend aus Eigenwerten $E \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen ψ_E, liefern insbesondere das Energiespektrum — die möglichen Werte der Energie — des Problems.

c) **(2 P.)** Wenn $\psi_E(\vec{r})$ Eigenfunktion von Gl. (8) mit Energie E ist, so ist $\psi(t,\vec{r}) = \psi_E(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (7).

ii. Bewegung eines Teilchens in einer Raumdimension (22 P.)

a) **(3 P.)** Im Fall eines eindimensionalen Problems wird die stationäre Schrödinger-Gleichung (8) zu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi_E(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x), \tag{9}$$

hiernach mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Da das letztere nur einen endlichen Sprung in $x = 0$ hat, werden eine Lösung ψ_E der Gl. (9) und deren Ableitung ψ'_E beide stetig in diesem Punkt sein.

b) **(9 P.)** Fall $0 < E < V_0$.

Die Gl. (9) mit dem Potential (10) lautet

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi''_E(x) + E\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0 \quad , \quad \frac{\hbar^2}{2m}\psi''_E(x) + (E - V_0)\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0.$$

Mit $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa \equiv \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ lassen sich diese Differentialgleichungen noch in der Form

$$\psi''_E(x) + k^2\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0 \quad , \quad \psi''_E(x) - \kappa^2\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

schreiben, mit den jeweiligen Lösungen

$$\psi_E(x) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad \text{für} \quad x < 0 \quad , \quad \psi_E(x) = C\,\mathrm{e}^{-\kappa x} + D\,\mathrm{e}^{\kappa x} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

mit komplexen Konstanten A, B, C, D. Dabei muss die letztere Null sein, damit $\psi_E(x)$ im Limes $x \to +\infty$ nicht unendlich groß wird. Dementsprechend fällt ψ_E für $x \geq 0$ exponentiell ab, d.h. $\psi_E(x) \propto \mathrm{e}^{-\kappa x}$, entsprechend einer nicht-verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit(sdichte) $|\psi_E(x)|^2$ — obwohl das Teilchen im klassischen Fall gar nicht in diesen Bereich eindringen kann.

Berücksichtigt man nun die Anschlussbedingungen in $x = 0$, so ergibt die Stetigkeit von ψ_E und ψ'_E jeweils $A + B = C$ und $\mathrm{i}kA - \mathrm{i}kB = -\kappa C$, was auch in der Form des Systems

$$\begin{cases} B - C = -A \\ kB + \mathrm{i}\kappa C = kA \end{cases}$$

geschrieben werden kann, dessen Lösung

$$B = \frac{k - \mathrm{i}\kappa}{k + \mathrm{i}\kappa} A \quad , \quad C = \frac{2kA}{k + \mathrm{i}\kappa}$$

ist. Somit gilt insgesamt

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \dfrac{k - \mathrm{i}\kappa}{k + \mathrm{i}\kappa}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) = \dfrac{2A}{k + \mathrm{i}\kappa}[k\cos(kx) - \kappa\sin(kx)] & \text{für} \quad x < 0 \\ \dfrac{2kA}{k + \mathrm{i}\kappa}\,\mathrm{e}^{-\kappa x} \quad \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

c) **(10 P.)** Fall $E \geq V_0$.

Jetzt wird die stationäre Schrödinger-Gleichung nach Umschreibung zu

$$\psi_E''(x) + k^2\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0 \quad , \quad \psi_E''(x) + k'^2\psi_E(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

mit $k' \equiv \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Die jeweiligen Lösungen sind der Form

$$\psi_E(x) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \quad \text{für} \quad x < 0 \quad , \quad \psi_E(x) = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

mit (neuen) komplexen Konstanten A, B, C, D. Für eine aus $x \to -\infty$ einlaufende Welle ist $D = 0$ und die Anschlussbedingungen in $x = 0$ lauten $A + B = C$ und $\mathrm{i}kA - \mathrm{i}kB = \mathrm{i}k'C$, d.h. noch

$$\begin{cases} B - C = -A \\ kB + k'C = kA, \end{cases}$$

woraus

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A \quad , \quad C = \frac{2kA}{k + k'}$$

folgt:

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \dfrac{k - k'}{k + k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) & \text{für} \quad x < 0 \\ \dfrac{2kA}{k + k'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} \quad \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Der Transmissionskoeffizient T ist das Verhältnis der quadrierten Amplituden der transmittierten und einlaufenden Wellen:

$$T \equiv \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2}{(k + k')^2}. \tag{13}$$

Für $E \gg V_0$, und insbesondere im Limes $E \to \infty$, gilt $k \simeq k'$ und somit $T \simeq 1$.

3. Teilchen in einem kugelsymmetrischen Kastenpotential (30 P.)

i. **(6 P.)** Im Fall $\ell = 0$ vereinfacht sich die gegebene Radialgleichung zu

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big[rR(r)\big] + V(r)R(r) = ER(r).$$

Für den Fall des kugelsymmetrischen Kastenpotentials ergibt dies

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big[rR(r)\big] = (E + V_0)R(r) \quad \text{für} \quad r \leq r_0$$

d.h. nach einfacher Umschreibung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\big[rR(r)\big] + k^2\big[rR(r)\big] = 0 \tag{14}$$

mit $k \equiv \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$.

Um die Stetigkeit der Wellenfunktion in $r = r_0$ sicherzustellen, soll $R(r_0) = 0$ sein. Dazu soll $R(r)$ regulär in $r = 0$ sein: $\lim\limits_{r \to 0} |R(r)| < \infty$.

ii. **(12 P.)** Aus Gl. (14) folgt, dass die Funktion $u(r) \equiv rR(r)$ für $r \leq r_0$ die Differentialgleichung

$$u''(r) + k^2 u(r) = 0 \tag{15}$$

erfüllt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist der Form

$$u(r) = A' \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} + B' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} = A\cos(kr) + B\sin(kr)$$

mit komplexen Konstanten A, B oder äquivalent A', B'.

Für $r \ll 1$ gelten $\cos(kr) \sim 1$ und $\sin(kr) \sim kr$. Damit $R(r) = u(r)/r$ regulär in $r = 0$ bleibt, darf es keinen Term in $\cos(kr)$ in $u(r)$ geben, d.h. $A = 0$ und $u(r) = B\sin(kr)$. Dann wird die Bedingung $R(r_0) = 0$ zu $u(r_0) = 0$, was erfüllt wird, wenn kr_0 ein Vielfaches von π ist:

$$u_n(r) = B\sin(k_n r) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{r_0} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Der Fall $n = 0$ führt zu $u(r) = 0$, d.h. zu einer nicht-physikalisch-relevanten Eigenfunktion, und wird daher nicht weiter berücksichtigt. Wiederum führt eine negative ganze Zahl $-n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ zur gleichen Eigenfunktion (bis auf ein Minus-Zeichen) wie n.

iii. **(6 P.)** Aus dem Ausdruck (16) für k_n und der Definition von k folgt die Eigenenergie

$$E_{0,n} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} - V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mr_0^2} n^2 - V_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Wiederum lautet die zugehörige Radialfunktion

$$R_{n,0}(r) = \frac{B\sin(k_n r)}{r}. \tag{18}$$

iv. **(6 P.)** Die Normierungsbedingung für die Eigenfunktion $\psi_E(\vec{r}) = R_{n,0}(r) Y_{00}(\theta, \varphi)$ lautet

$$1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_E(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3\vec{r} = \int |Y_{00}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \int_0^\infty |R_{n,0}(r)|^2 r^2 \, \mathrm{d}r = \int_0^{r_0} |R_{n,0}(r)|^2 r^2 \, \mathrm{d}r,$$

wobei $R(r) = 0$ für $r > r_0$ benutzt wurde. Mit der Form (18) für $R_{n,0}(r)$ ergibt sich

$$1 = |B|^2 \int_0^{r_0} \sin^2(k_n r) \, \mathrm{d}r = \frac{|B|^2}{2} \int_0^{r_0} [1 - \cos(2k_n r)] \, \mathrm{d}r = \frac{|B|^2 r_0}{2}$$

d.h. $|B| = \sqrt{2/r_0}$.

4. Addition und Kopplung von Drehimpulsen **(25 P.)**

i. Vorbereitung **(10 P.)**

a) **(3 P.)** Die Komponenten $\hat{J}_i$ eines Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$ genügen den Beziehungen

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} \hat{J}_k, \tag{19}$$

wobei ϵ_{ijk} das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ist.

b) **(7 P.)** Wenn $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ die Spin-Operatoren von Teilchen mit den Spins j_1 und j_2 sind, dann sind die Eigenwerte des quadrierten Gesamtspin-Operators $\left(\hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}\right)^2$ die Zahlen $j(j+1)\hbar^2$ mit $j \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2\}$. Der Eigenwert, der der Spinquantenzahl j entspricht, ist $2j + 1$-mal entartet — die zugehörige magnetische Quantenzahl m_j darf die Werte $-j$, $-j + 1$, …, $j - 1$, j annehmen.

ii. **(15 P.)** Der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{2g}{\hbar^2} \left(\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)} + \hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(3)} + \hat{\vec{J}}^{(2)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(3)} \right) \tag{20}$$

kann auch in der Form

$$\hat{H} = -\frac{g}{\hbar^2}\Big[\Big(\hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)} + \hat{\vec{J}}^{(3)}\Big)^2 - \big(\hat{\vec{J}}^{(1)}\big)^2 - \big(\hat{\vec{J}}^{(2)}\big)^2 - \big(\hat{\vec{J}}^{(3)}\big)^2\Big] \tag{21}$$

geschrieben werden, wobei $\hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)} + \hat{\vec{J}}^{(3)}$ der Gesamtspin-Operator des Systems ist. Dabei gilt für jedes $a = 1, 2, 3$

$$\big(\hat{\vec{J}}^{(a)}\big)^2 = j_a(j_a+1)\hbar^2\hat{\mathbb{1}} = 2\hbar^2\hat{\mathbb{1}},$$

so dass die Aufgabe ist, die Eigenwerte von $\Big(\hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)} + \hat{\vec{J}}^{(3)}\Big)^2$ zu bestimmen.

Betrachtet man zuerst $\hat{\vec{J}}^{(1+2)} \equiv \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$, so sind die mit $\big[\hat{\vec{J}}^{(1+2)}\big]^2$ assoziierten Quantenzahlen $j_{1+2} = 0$ (nicht-entartet), $j_{1+2} = 1$ (3-mal entartet) und $j_{1+2} = 2$ (5-mal entartet).

Addiert man dann $\hat{\vec{J}}^{(1+2)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(3)}$, so hat man die folgenden Möglichkeiten für die resultierende Gesamtspinquantenzahl j:

- für $j_{1+2} = 0$ werden ein Spin 0 und ein Spin 1 addiert, so dass j nur den Wert 1 annehmen kann, mit Entartungsgrad 3.
- für $j_{1+2} = 1$ werden zwei Spins 1 addiert, so dass j die Werte 0 (nicht-entartet), $j = 1$ (3-mal entartet) und $j = 2$ (5-mal entartet) annehmen kann.
- für $j_{1+2} = 2$ werden ein Spin 2 und ein Spin 1 addiert, so dass j die Werte 1 (3-mal entartet), $j = 2$ (5-mal entartet) und $j = 3$ (7-mal entartet) annehmen kann.

Anders gesagt kommen die Werte $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, entsprechend jeweils einer Energie

$$E_j = -\frac{g}{\hbar^2}\big[j(j+1)\hbar^2 - 6\hbar^2\big] = -g\big[j(j+1) - 6\big]$$

mit folgenden Entartungsgraden vor:

- $j = 0$: nicht-entartet; Energie $E_0 = 6g$;
- $j = 1$: 9-mal entartet; Energie $E_1 = 4g$;
- $j = 2$: 10-mal entartet; Energie $E_2 = 0$;
- $j = 3$: 7-mal entartet; Energie $E_3 = -6g$.

5. Harmonische Oszillatoren und Störungsrechnung (25 P.)

i. Eindimensionaler harmonischer Oszillator $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ **(10 P.)**

a) **(2 P.)** Der Kommutator der zugehörigen Ab- und Aufsteigeoperatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ ist

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}. \tag{22}$$

b) **(4 P.)** Wenn $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Basis der Energie-Eigenzustände bezeichnet, gelten

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{23}$$

c) **(4 P.)** Aus $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ folgt

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\big[\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2\big] = \frac{\hbar}{2m\omega}\big[\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2\big].$$

Unter Nutzung des Kommutators (22) lautet dies noch

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\big[\hat{a}^2 + \hat{\mathbb{1}} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2\big].$$

Wenn man das diagonale Matrixelement $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$ berechnet, werden die Terme in $\hat{a}^2$ und $(\hat{a}^\dagger)^2$ nicht beitragen:

$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\big(\langle n|\hat{\mathbb{1}}|n\rangle + 2\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\big) = \frac{\hbar}{2m\omega}(1+2n),$$

d.h. noch

$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

ii. **(15 P.)** System aus zwei identischen eindimensionalen harmonischen Oszillatoren

a) **(7 P.)** Der Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_2^2 \tag{25}$$

beschreibt zwei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren. Dabei sind die Energieniveaus jedes einzelnen Oszillators der Form $(n_i+\frac{1}{2})\hbar\omega$ mit $n_i \in \mathbb{N}$ und nicht entartet.

Daher sind die Energieeigenwerte für das System aus zwei Oszillatoren der Form

$$E_{n_1,n_2} = (n_1+n_2+1)\hbar\omega \quad \text{mit } n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \tag{26a}$$

Diese Energien lassen sich auch in der Form

$$E_n = (n+1)\hbar\omega \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \tag{26b}$$

schreiben, wobei das n-te Energieniveau genau $n+1$-mal entartet ist: bei gegebener $n = n_1 + n_2$ kann n_1 jeden Wert $n_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ annehmen, was n_2 automatisch festlegt. Insbesondere ist nur der Grundzustand ($n = 0$) nicht entartet.

b) **(8 P.)** Unter dem Einfluss der Störung $\hat{W} = \lambda\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2$ wird die Energie des Grundzustands $|0\rangle$ zur ersten Ordnung um

$$\Delta E = \langle 0|\hat{W}|0\rangle$$

verschoben. Dabei entspricht der Grundzustand $|0\rangle$ des Systems aus zwei Oszillatoren dem Produkt $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \equiv |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle$ der Grundzustände der einzelnen Oszillatoren — $n = n_1 + n_2 = 0$ für $n_1 = n_2 = 0$. Daher gilt

$$\langle 0|\hat{W}|0\rangle = \lambda\langle 0|\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2|0\rangle = \lambda\langle 0_1|\hat{x}_1^2|0_1\rangle\langle 0_2|\hat{x}_1^2|0_2\rangle.$$

Unter Nutzung des Ergebnisses aus **i.c)** gilt $\langle 0_i|\hat{x}_i^2|0_i\rangle = \hbar/2m\omega$, woraus

$$\Delta E = \lambda\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \tag{27}$$

folgt.