B.4 Laguerre-Polynome

B.4.1 Laguerre-Polynome

Die *Laguerre-Polynome* $L_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind die regulären Lösungen für $x \in \mathbb{R}^+$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0 \tag{B.42}$$

mit der zusätzlichen Bedingung, dass das Integral von $\mathrm{e}^{-x}\,[L_n(x)]^2$ über $\mathbb{R}^+$ gleich 1 ist.

Für diese Lösungen gilt die Rodrigues-Formel

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n\mathrm{e}^{-x}\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B.43}$$

Anhand dieser Formel kann man die ersten Laguerre-Polynome berechnen:

$$L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = -x+1 \quad , \quad L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \quad , \quad L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1. \tag{B.44}$$

Allgemeiner ist L_n ein Polynom vom Grad n ist, dessen Leitkoeffizient $(-1)^n/n!$ beträgt.

Die Laguerre-Polynome können auch ausgehend von L_0 mit Hilfe der Rekursionsformel[47]

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1 \tag{B.45}$$

berechnet werden.

Diese Polynome genügen der *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn} \quad \forall m,n \in \mathbb{N}, \tag{B.46a}$$

wobei sich die Orthogonalität auf das hermitesche Skalarprodukt

$$\int_0^\infty g(x)^* f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{B.46b}$$

bezieht.

Schließlich folgert man aus der Rodrigues-Formel (B.7) die Beziehung

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x). \tag{B.47}$$

B.4.2 Zugeordnete Laguerre-Polynome

Die *zugeordneten* oder *verallgemeinerten Laguerre-Polynome* $L_n^\alpha(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > -1$ sind die regulären Lösungen für $x \in \mathbb{R}^+$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$xy''(x) + (\alpha+1-x)y'(x) + ny(x) = 0 \tag{B.48}$$

mit der zusätzlichen Bedingung, dass der Leitkoeffizient von L_n^α immer $(-1)^n/n!$ ist. Offensichtlich ist L_n^α im Fall α gleich dem Laguerre-Polynome L_n.

Für diese Lösungen gilt die Rodrigues-Formel

$$L_n(x) = \frac{x^{-\alpha}\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^{\alpha+n}\mathrm{e}^{-x}\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B.49}$$

Anhand dieser Formel kann man die ersten verallgemeinerten Laguerre-Polynome berechnen:

---

[47] Diese Formel lautet äquivalent $xL_n(x) = -(n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$, d.h. ist der Form (B.4a) mit $\alpha_n = -(n+1)$, $\beta_n = 2n+1$ und $\gamma_n = -n = \alpha_{n-1}$.

$$L_0^\alpha(x) = 1 \quad , \quad L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1 \quad , \quad L_2^\alpha(x) = \frac{x^2}{2} - (\alpha+2)x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} \tag{B.50a}$$

$$L_3^\alpha(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{(\alpha+3)x^2}{2} - \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)x}{2} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6} \quad , \; \ldots \tag{B.50b}$$

Allgemeiner ist L_n^α ein Polynom vom Grad n ist.

Die zugeordneten Laguerre-Polynome genügen der Rekursionsformel

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+1+\alpha-x)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \quad \text{für } n \geq 1 \tag{B.51}$$

und der *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x)\, \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\delta_{mn} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \tag{B.52a}$$

für das hermitesche Skalarprodukt

$$\int_0^\infty g(x)^* f(x)\, \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \, \mathrm{d}x. \tag{B.52b}$$

Die Ableitung eines verallgemeinerten Laguerre-Polynoms ergibt bis auf einen trivialen Vorfaktor ein anderes verallgemeinertes Laguerre-Polynom:

$$\frac{\mathrm{d}^k L_n^\alpha(x)}{\mathrm{d}x^k} = (-1)^k L_{n-k}^{\alpha+k}(x). \tag{B.53}$$

Schließlich können die Hermiteschen Polynome durch verallgemeinerte Laguerre-Polynome mit $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ ausdrückt werden:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\, 2^{2n}\, n!\, L_n^{-1/2}(x^2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^+, \tag{B.54a}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n\, 2^{2n+1}\, n!\, x L_n^{1/2}(x^2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^+. \tag{B.54b}$$