# B.3 Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome

## B.3.1 Kugelflächenfunktionen

### B.3.1 a Definition

Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitskugelfläche von $\mathbb{R}^3$, deren Punkte sich durch den Polarwinkel $\theta \in [0, \pi]$ und den Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ kennzeichnen lassen.

Die (skalaren) *Kugelflächenfunktionen* $Y_{\ell,m}$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl ist und $m \in \{-\ell, -\ell+1, \ldots, 0, \ldots, \ell\}$ ganzzahlig ist, sind komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{S}^2$, die gleichzeitig Eigenfunktionen zu den Differentialoperatoren

$$\frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad \text{und} \quad -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{B.13}$$

mit den jeweiligen Eigenwerten $\ell(\ell+1)$ und $m$ sind:

$$\frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = \ell(\ell+1)Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \tag{B.14a}$$

und

$$-\mathrm{i}\frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = mY_{\ell,m}(\theta,\varphi). \tag{B.14b}$$

Solche Eigenfunktionen sind nur bis auf eine multiplikative komplexe Konstante definiert. Um die letztere festzulegen, werden zusätzliche Anforderungen an $Y_{\ell,m}$ gestellt:

- Die Kugelflächenfunktionen sind auf 1 normiert:

$$\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}^2\Omega = 1 \tag{B.15}$$

  wobei $\mathrm{d}^2\Omega$ das Raumwinkelelement bezeichnet.(44)

- Die relativen Phasen von Kugelflächenfunktionen mit dem gleichen Wert von $\ell$ sind so, dass die Beziehung

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,Y_{\ell,m-1}(\theta,\varphi) \tag{B.16}$$

  gilt.

- $Y_{\ell,0}(0,0)$ ist reell und positiv.

Die beiden letzten Anforderung entsprechen der Condon–Shortley-Phasenkonvention.

Diese Eigenschaften werden durch die folgenden Funktionen erfüllt: für $\ell = 0$

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \tag{B.17a}$$

für $\ell = 1$

$$Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{B.17b}$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}; \tag{B.17c}$$

(44) Anstatt $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ findet man auch die Schreibweise $Y_{\ell,m}(\Omega)$.

für $\ell = 2$

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \tag{B.17d}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \tag{B.17e}$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\varphi}; \tag{B.17f}$$

usw. Allgemeiner gilt

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_{\ell,m}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{B.18}$$

wobei die Funktionen $P_{\ell,m}$ im Abschn. B.3.2 unten definiert und weiter diskutiert werden.

### B.3.1 b Einige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

Jetzt werden ein paar wichtige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen $\{Y_{\ell,m}\}$ ohne Beweis aufgelistet.

**Kugelflächenfunktionen als orthonormierte Hilbert-Basis von $L^2(\mathbb{S}^2)$**

Die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ sind nicht nur auf 1 normiert, sie sind auch orthogonal zu einander:

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell',m'}(\theta,\varphi)^* Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}^2\Omega = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}. \tag{B.19}$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden einen vollständigen Satz von quadratintegrablen Funktionen auf $\mathbb{S}^2$:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta',\varphi')^* Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \frac{\delta(\theta'-\theta)\,\delta(\varphi'-\varphi)}{\sin\theta} = \delta^{(2)}(\Omega'-\Omega). \tag{B.20}$$

Aus den beiden letzteren Eigenschaften folgt, dass sich jede quadratintegrable Funktion $f$ auf $\mathbb{S}^2$ als Summe

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m}Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \tag{B.21a}$$

von Kugelflächenfunktionen schreiben lässt, wobei die Koeffizienten $a_{\ell,m}$ eindeutig durch

$$a_{\ell,m} = \int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}^2\Omega \tag{B.21b}$$

gegeben sind.

**Parität**

Unter der gleichzeitigen Transformation $(\theta,\varphi) \to (\pi-\theta,\varphi+\pi)$, entsprechend dem Winkelanteil der Raumspiegelung $\vec{r} \to -\vec{r}$, hat die Kugelflächenfunktion $Y_{\ell,m}$ die Parität $(-1)^\ell$:

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\varphi+\pi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\varphi). \tag{B.22}$$

**Rekursionsrelation**

Kugelflächenfunktion mit unterschiedlichen Werten von $\ell$ genügen der Beziehung

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)\cos\theta = \sqrt{\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+3)(2\ell+1)}}\,Y_{\ell+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)}}\,Y_{\ell-1,m}(\theta,\varphi). \tag{B.23}$$

Die Gleichung gilt auch im Fall $m = \pm\ell$: dann ist der Term unter der Wurzel im zweiten Summanden automatisch Null, so dass die Frage der Bedeutung von $Y_{\ell-1,\pm\ell}$ keine Rolle spielt.

## B.3.2 Legendre-Polynome

### B.3.2 a Legendre-Polynome

Die *Legendre*[am]*-Polynome* $P_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind Lösungen für $x \in [-1, 1]$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (*Legendre-Differentialgleichung*)

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n + 1)y(x) = 0 \tag{B.24}$$

mit der zusätzlichen (Normierungs-)Bedingung $y(1) = 1$.

> Bei gegebener $n \in \mathbb{R}$ hat diese Differentialgleichung zwei linear unabhängige Lösungen, die im Allgemeinen singulär in $x = -1$ oder $x = 1$ sind. Nur im Fall $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine einzige Lösung $P_n$ mit $P_n(1) = 1$, die auch in $x = -1$ regulär ist.

Für diese Lösungen gilt die Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(1 - x^2)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B.25}$$

Mithilfe dieser Formel kann man die ersten Legendre-Polynome berechnen:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2}\\
P_3(x) &= \frac{5x^3 - 3x}{2}\\
P_4(x) &= \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \ldots
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Allgemeiner findet man rekursiv, dass $P_n$ ein Polynom vom Grad $n$ ist, das im Intervall $]-1, 1[$ genau $n$ Nullstellen hat.

Weitere nützliche Eigenschaften der Legendre-Polynome sind die Rekursionsformel[45]

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \tag{B.27}$$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2\delta_{mn}}{2n + 1}. \tag{B.28}$$

Hier bezieht sich die Orthogonalität auf das herkömmliche Skalarprodukt von (reellen) quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Aus der Rodrigues-Formel (B.25) folgt sofort die Parität der Legendre-Polynome:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{B.29}$$

[45] Diese Formel lässt sich auch in der Form

$$xP_n(x) = \frac{n + 1}{2n + 1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n + 1} P_{n-1}(x),$$

ähnlich der Gl. (B.4a) mit $\alpha_n = (n + 1)/(2n + 1)$, $\beta_n = 0$ und $\gamma_n = n/(2n + 1) = \alpha_{n-1}||P_n||^2_{L^2}/||P_{n-1}||^2_{L^2}$ schreiben, wobei in der letzteren Gleichung die aus Gl. (B.28) folgenden quadrierten $L^2([-1, 1])$-Normen der Legendre-Polynome benutzt wurden.

[am] A.-M. Legendre, 1752–1833

In den physikalischen Anwendungen werden die Legendre-Polynome meistens mit dem Argument $x = \cos\theta$ benutzt, wobei $\theta \in [0, \pi]$ einen Winkel — meistens den Polarwinkel des Kugelkoordinatensystems — bezeichnet. Ausgedrückt durch $\theta$ wird die Legendre-Differentialgleichung (B.24) zu

$$y''(\theta) + \cot\theta\, y'(\theta) + n(n+1)y(\theta) = 0. \tag{B.30}$$

Dann lautet die Rodrigues-Formel

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\cos\theta)^n} \left[(\sin\theta)^{2n}\right] \tag{B.31}$$

Schließlich wird die Orthogonalitätsrelation (B.28) zu

$$\int_0^\pi P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta)\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}. \tag{B.32}$$

### B.3.2 b Zugeordnete Legendre-Polynome

Die sogenannten *zugeordneten Legendre-Polynome* $P_{\ell,m}(x)$, die eigentlich nicht immer Polynome sind, sind Lösungen für $x \in [-1, 1]$ der *verallgemeinerten Legendre-Differentialgleichung*

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y(x) = 0. \tag{B.33}$$

Genauer ist $P_{\ell,m}$ eine nicht-singuläre Lösung dieser Differentialgleichung, die nur für $\ell \in \mathbb{N}$ und $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, 0, 1, \dots, \ell\}$ existiert.

Offensichtlich ergibt sich für $m = 0$ und beliebige $\ell \in \mathbb{N}$ das Legendre-Polynom $P_\ell$:

$$P_{\ell,0}(x) = P_\ell(x) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{B.34}$$

Für $m \geq 0$ kann $P_{\ell,m}$ durch sukzessive Ableitungen von $P_\ell$ abgeleitet werden:[46]

$$P_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x) \quad \text{für} \quad \ell \in \mathbb{N}\ ,\ m \in \{0, 1, \dots, \ell\}. \tag{B.35a}$$

Unter Nutzung der Rodrigues-Formel (B.25) für das Legendre-Polynom $P_\ell$ ergibt sich

$$P_{\ell,m}(x) = \frac{1}{2^\ell\, \ell!}(1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}} \left[(1-x^2)^\ell\right] \quad \text{für} \quad \ell \in \mathbb{N}\ ,\ m \in \{0, 1, \dots, \ell\}. \tag{B.35b}$$

Für $m < 0$ wird $P_{\ell,m}$ durch die Beziehung

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} P_{\ell,-m}(x) \tag{B.36}$$

definiert.

Die ersten zugeordneten mit $\ell \leq 2$ und $m \neq 0$ lauten

$$P_{1,1}(x) = \sqrt{1-x^2} = -2P_{1,-1}(x) \tag{B.37a}$$

$$P_{2,1}(x) = 3x\sqrt{1-x^2} = -6P_{2,-1}(x) \quad , \quad P_{2,2}(x) = 3(1-x^2) = 24P_{2,-2}(x). \tag{B.37b}$$

Dazu findet man noch

$$P_{\ell,\ell}(x) = (2\ell-1)!!(1-x^2)^{\ell/2}, \tag{B.37c}$$

wobei die Doppelfakultät $(2\ell-1)!!$ das Produkt aller ungeraden Zahlen kleiner gleich $2\ell-1$ ist:

$$(2\ell-1)!! = (2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}.$$

[46] Genauer definieren diese Formeln $P_{\ell,m}$, weil die Differentialgleichung invariant unter der Substitution $m \to -m$ ist, und somit den Unterschied zwischen positiven und negativen Werten von $m$ nicht erlaubt.

Allgemeiner wird $P_{\ell,m}$ mit gerader $m$ ein Polynom vom Grad $\ell$ sein, während $P_{\ell,m}(x)$ im Fall einer ungeraden $m$ das Produkt aus $\sqrt{1-x^2}$ mit einer Polynomfunktion vom Grad $\ell - 1$ ist.

Die zugeordneten Legendre-Polynome genügen verschiedener Orthogonalitätsrelationen, für Funktionen mit gleicher $\ell$ oder mit gleicher $m$. Die letztere lautet

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}(x) P_{\ell',m}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}, \tag{B.38}$$

entsprechend einer Verallgemeinerung der Beziehung (B.28) für Legendre-Polynome.

Wenn man die Substitution $x = \cos\theta$ macht, wird die verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung zu

$$y''(\theta) + \cot\theta\, y'(\theta) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] y(\theta) = 0. \tag{B.39}$$

Dann lauten die zugeordneten Legendre-Polynome mit nicht-negativer $m$

$$P_{\ell,m}(\cos\theta) = (\sin\theta)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}(\cos\theta)^m} P_\ell(\cos\theta) \quad \text{für} \quad \ell \in \mathbb{N}\ ,\ m \in \{0, 1, \ldots, \ell\}, \tag{B.40}$$

woraus sich die Funktion mit negativer $m$ mithilfe der Beziehung (B.36) ableiten lassen.

Schließlich lautet die Orthogonalitätsrelation bei fester $m$

$$\int_0^\pi P_{\ell,m}(\cos\theta) P_{\ell',m}(\cos\theta)\, \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}. \tag{B.41}$$