B.2 Hermitesche Polynome

B.2.1 Definition

Die *Hermiteschen Polynome* $H_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind Lösungen für $x \in \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (*Hermite-Differentialgleichung*)

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \tag{B.6}$$

mit der zusätzlichen Bedingung, dass das Produkt $y(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ quadratintegrabel sein muss.

Für diese Lösungen gilt die Rodrigues[(ak)]-Formel

$$H_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{B.7}$$

Mithilfe dieser Formel kann man die ersten Hermiteschen Polynome berechnen:

$$H_0(x) = 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \quad , \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad , \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad , \quad \ldots \tag{B.8}$$

Allgemeiner findet man rekursiv, dass H_n ein Polynom vom Grad n ist, wobei der Koeffizient von x^n („Leitkoeffizient“) 2^n beträgt.

B.2.2 Einige Eigenschaften der Hermiteschen Polynome

Ausgehend von H_0 und H_1 kann man anhand der Rekursionsformel[(42)]

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1 \tag{B.9}$$

die sukzessiven Hermiteschen Polynome zu berechnen.

Diese Polynome genügen der *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn} \quad \forall m,n \in \mathbb{N}, \tag{B.10a}$$

wobei sich die Orthogonalität auf das hermitesche(!) Skalarprodukt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{B.10b}$$

bezieht. Deshalb bilden die Familie von orthogonalen Polynomen.

Genauer bilden die Hermiteschen Polynome eine Orthogonalbasis der Funktionen f auf $\mathbb{R}$, deren Produkt mit $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ quadratintegrabel ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x < \infty.$$

Insbesondere ist die Familie $\{H_n(x)\}$ vollständig.

Aus der Rodrigues-Formel (B.7) folgen sofort die Parität der Hermiteschen Polynome:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \tag{B.11}$$

und die Beziehung

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \tag{B.12}$$

entsprechend bis auf einen Faktor 2, der sich in der Normierung der Polynome absorbieren lässt, der Definition einer Appell[(al)] Folge von Polynomen.

(42) Diese Formel lautet äquivalent $xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x)$, d.h. ist der Form (B.4a) mit $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ und $\gamma_n = n = \frac{1}{2}(2n)$, wobei $2n$ laut Gl. (B.10a) das Verhältnis der quadrierten Norme von H_n und H_{n-1} ist.

(ak) O. Rodrigues, 1795–1851 (al) P. Appell, 1855–1930