III.3 Relativistisch kovariante Formulierung der Grundgesetze

Anhand der in Abschn. III.2 eingeführten Darstellungen der elektrodynamischen Größen lassen sich die Maxwell-Gleichungen (§ III.3.1), die Kontinuitätsgleichung (§ III.3.2), die Lorentz-Kraftdichte (§ III.3.3) und die Energie- und Impulsbilanz (§ III.3.4) in relativistisch kovarianter Form schreiben.

III.3.1 Maxwell-Gleichungen

Unter Verwendung des elektromagnetischen Feldstärketensors (III.16) und des elektrischen Viererstroms (III.25) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \mu_0 J^\mu_{\text{el.}}(\mathsf{x}) \quad \forall \mu \in \{0,1,2,3\}, \tag{III.28a}$$

$$\partial^\mu F^{\nu\rho}(\mathsf{x}) + \partial^\nu F^{\rho\mu}(\mathsf{x}) + \partial^\rho F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 0 \quad \forall \mu,\nu,\rho \in \{0,1,2,3\}. \tag{III.28b}$$

Dabei stellen die Gl. (III.28a) mit einem Quellterm die inhomogenen Maxwell–Gauß- und Maxwell–Ampère-Gleichungen (III.2a) und (III.2d) dar.

Wiederum stehen die Gl. (III.28b) — wobei eigentlich nur die vier Fälle $(\mu,\nu,\rho) = (0,1,2)$, (0,1,3), (0,2,3) und (1,2,3) unterschiedlich sind — für die homogenen Maxwell-Gleichungen (III.2b) und (III.2c). Unter Verwendung des dualen elektromagnetischen Feldstärketensors (III.19) lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen noch als

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 0 \quad \forall \nu \in \{0,1,2,3\} \tag{III.28c}$$

umschreiben. In dieser Form ist sofort klar, dass es nur vier Gleichungen gibt.

III.3.2 Kontinuitätsgleichung

Ausgedrückt durch den elektrischen Viererstrom (III.25) lautet die Kontinuitätsgleichung (III.3)

$$\partial_\mu J^\mu_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = 0. \tag{III.29}$$

Diese Bilanzgleichung lässt sich auch direkt aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen herleiten: somit lautet die Viererdivergenz der Gl. (III.28a)

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \mu_0\, \partial_\mu J^\mu_{\text{el.}}(\mathsf{x}).$$

Dabei sind auf der linke Seite $\partial_\mu \partial_\nu$ symmetrisch und $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch unter dem Austausch von μ und ν, so dass die zweifache Kontraktion $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ automatisch Null ist, entsprechend Gl. (III.29).

III.3.3 Lorentz-Kraft und -Kraftdichte

Das elektromagnetische Feld übt auf eine elektrische Ladungs- und Stromverteilung eine Lorentz-Kraftdichte $\vec{f}_{\text{L}}$ [Gl. (III.4)] aus. Mit dieser kann man eine Viererkraftdichte f_{L} assoziieren, die sich durch den elektromagnetischen Feldstärketensor (III.16) und den elektrischen Viererstrom (III.25) ausdrücken lässt. Komponentenweise gilt

$$f^\nu_{\text{L}}(\mathsf{x}) = J_{\text{el.},\mu}(\mathsf{x}) F^{\mu\nu}(\mathsf{x}). \tag{III.30a}$$

Mit den expliziten Ausdrücken des Feldstärketensors und des Viererstroms prüft man nämlich schnell, dass die räumlichen Komponenten

$$f^i_{\text{L}}(\mathsf{x}) = \rho_{\text{el.}}(\mathsf{x}) E^i(\mathsf{x}) + \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon^{ikl} j^k_{\text{el.}}(\mathsf{x}) B^l(\mathsf{x}) \quad \text{für } i = 1,2,3 \tag{III.30b}$$

betragen. Wiederum lautet die zeitliche Komponente

$$f_{\mathrm{L}}^0(\mathsf{x}) = \frac{1}{c}\vec{\jmath}_{\mathrm{el.}}(\mathsf{x}) \cdot \vec{E}(\mathsf{x}). \tag{III.30c}$$

Lorentz-Kraft auf eine Punktladung

Im Fall einer Punktladung q mit Vierergeschwindigkeit $\mathsf{u} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$, entsprechend dem elektrischen Viererstrom (III.26a), kann die Lorentz-Kraftdichte sofort über die Ortskoordinaten integriert werden. Daraus ergibt sich die Lorentz-Viererkraft

$$F_{\mathrm{L}}^\nu = q u_\mu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}). \tag{III.31}$$

Mit dieser Viererkraft lautet die relativistisch kovariante Verallgemeinerung (II.14) des zweiten newtonschen Gesetzes

$$\frac{\mathrm{d}p^\nu}{\mathrm{d}\tau} = q u_\mu F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) \tag{III.32}$$

wobei $\tau = t/\gamma$ bzw. $\mathsf{p} = m\mathsf{u}$ die Eigenzeit bzw. den (kinetischen) Viererimpuls der Punktladung bezeichnet.

Die zeitliche Komponente der Gl. (III.31) lautet

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = q\gamma\,\vec{v}\cdot\vec{E}/c, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\mathrm{d}(p^0c)}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\cdot\vec{v};$$

auf der linken Seite steht die Rate der zeitlichen Änderung von der Energie p^0c der Punktladung; auf der rechten, die instantane Leistung der Lorentz-Kraft.

Bemerkung: Die Lorentz-Viererkraft (III.31) ist „orthogonal“ zur Vierergeschwindigkeit, $u_\nu F_{\mathrm{L}}^\nu = 0$.

Dies folgt aus der Antisymmetrie des elektromagnetischen Feldstärketensors und der Symmetrie des Produkts $u_\nu u_\mu$.

III.3.4 Energie- und Impulsbilanzgleichungen

Schließlich lassen sich die lokalen Bilanzgleichungen (III.15a) und (III.15b) für die Energie und den Impuls des elektromagnetischen Feldes unter Verwendung des Energieimpulstensors (III.27) und der Lorentz-Viererkraftdichte (III.30a) in der kompakten Form

$$\boxed{\partial_\mu T_{\mathrm{e.m.}}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = -f_{\mathrm{L}}^\nu(\mathsf{x})} \tag{III.33}$$

ausdrücken.

III.4 Weitere Resultate in relativistisch kovarianter Form

III.4.1 Bewegungsgleichung für das Viererpotential

Setzt man den Ausdruck (III.22) des Feldstärketensors durch das Viererpotential in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (III.28a) ein, so findet man

$$\partial_\nu\partial^\mu A^\nu(\mathsf{x}) - \partial_\nu\partial^\nu A^\mu(\mathsf{x}) = \mu_0 J_{\mathrm{el.}}^\mu(\mathsf{x}).$$

Dabei ist $\partial_\nu\partial^\nu$ gerade der d'Alembert-Operator $\square$ [Gl. (III.7)], so dass sich diese Gleichung als

$$\boxed{\square A^\mu(\mathsf{x}) = -\mu_0 J_{\mathrm{el.}}^\mu(\mathsf{x}) + \partial^\mu\big[\partial_\nu A^\nu(\mathsf{x})\big] \quad \forall\mu\in\{0,1,2,3\}} \tag{III.34}$$

umschreiben lässt. Dies stellt die Bewegungsgleichung für das Viererpotential $\mathsf{A}(\mathsf{x})$ dar. Die Komponente $\nu = 0$ ist äquivalent zur Bewegungsgleichungen (III.10b) des Skalarpotentials, die räumlichen Komponenten entsprechen der Gl. (III.10c) für das Vektorpotential.

Bemerkung: Aus der Beziehung (III.22) folgt

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(\mathsf{x}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma(\mathsf{x}),$$

woraus die homogene Gleichung $\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma(\mathsf{x}) = 0$ sofort folgt, da $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch und $\partial_\mu\partial_\rho$ symmetrisch unter dem Austausch von μ und ρ ist.

III.4.2 Klassische Wellengleichung und ebene Wellen

In Abwesenheit von äußeren Quellen des Feldes und in der Lorenz-Eichung $\partial_\nu A^\nu(\mathsf{x}) = 0$ wird die Bewegungsgleichung (III.34) zur klassischen Wellengleichung

$$\boxed{\Box A^\mu(\mathsf{x}) = 0 \quad \forall\mu \in \{0,1,2,3\}} \tag{III.35a}$$

oder äquivalent, in geometrischer Form

$$\Box\mathsf{A}(\mathsf{x}) = 0. \tag{III.35b}$$

Eine ebene Welle ist eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung der Form

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f\big(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t\big) \tag{III.36a}$$

wobei die Kreisfrequenz $\omega_{\vec{k}}$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ die *Dispersionsrelation* $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ erfüllen. Dabei gibt $\vec{k}$ die Propagationsrichtung an, während ε^μ die Komponente eines *Polarisationsvierervektors* $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist. Definiert man einen (lichtartigen) Vierervektor $\mathsf{k} = (k^0 \equiv \omega_{\vec{k}}/c, \vec{k})$, so lässt sich diese Lösung als

$$A^\mu(\mathsf{x}) = \varepsilon^\mu f(\mathsf{k}\cdot\mathsf{x}) \tag{III.36b}$$

schreiben, oder auch geometrisch

$$\mathsf{A}(\mathsf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} f(\mathsf{k}\cdot\mathsf{x}). \tag{III.36c}$$

Wegen der Lorenz-Eichbedingung (III.24) sollen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und k im Allgemeinen orthogonal zueinander sein, $\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. In einem Bezugssystem, wo A^0 verschwindet,[18] gilt automatisch $\varepsilon^0 = 0$ — woraus man erkennt, dass der Polarisationsvierervektor raumartig ist, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \varepsilon_\mu\varepsilon^\mu > 0$. In diesem Bezugssystem gilt somit $\mathsf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = \vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$: man findet die Transversalität des (Dreier-)Polarisationsvektors wieder.

[18] Diese Bedingung definiert die *temporale Weyl*[u]*-Eichung*, die hier, kombiniert mit der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$, äquivalent zur Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ ist.

[u] H. Weyl, 1885–1955