# Kapitel III

# Relativistisch kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Die Spezielle Relativitätstheorie wurde gerade entwickelt, um die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in allen Inertialsystemen zu gewährleisten. Dementsprechend ist Elektrodynamik automatisch eine „relativistische“ Theorie, was aber an der üblichen Formulierung der vier Maxwell-Gleichungen oder anderer Grundgleichungen (Abschn. III.1) nicht sofort erkennbar ist.

In diesem Kapitel werden die Gesetze und einige Resultate der Elektrodynamik in relativistisch kovarianter Notation formuliert. Somit werden erstens einige Lorentz-Vierervektoren und -tensoren eingeführt, welche die unterschiedlichen elektrodynamischen Größen darstellen (Abschn. III.2). Diese werden dann in Abschn. III.3 benutzt, um die Grundgleichungen der Elektrodynamik sowie einige daraus abgeleiteten wichtigen Ergebnisse auszudrücken.

## III.1 Wiederholung zur nicht-kovarianten Formulierung

In diesem Abschnitt werden der Vollständigkeit halber einige Grundlagen der klassischen Elektrodynamik in nicht-relativistisch-kovarianter Schreibweise dargelegt.

### III.1.1 Dynamische Variablen

Bewegte elektrisch geladene Teilchen erzeugen ein elektromagnetisches Feld, das wiederum die Bahnkurven der Teilchen beeinflusst. Zur Beschreibung eines solchen Systems sind die dynamischen Variablen

- *elektrische Ladungsdichte* $\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r})$;
- *elektrische Ladungsstromdichte* $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r})$.

  Für ein System aus Punktladungen mit jeweiligen elektrischen Ladungen $q_a$, Bahnkurven $\vec{x}_a(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_a(t)$ gilt

$$\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \sum_a q_a \delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}_a(t)\big) \quad , \quad \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t)\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}_a(t)\big), \tag{III.1}$$

  wobei $\delta^{(3)}$ die dreidimensionale Dirac[(n)]-Distribution bezeichnet;
- elektrisches Feld (bzw. *elektrische Feldstärke*) $\vec{E}(t,\vec{r})$;
- magnetisches Feld (bzw. *magnetische Induktion* oder *magnetische Flussdichte*) $\vec{B}(t,\vec{r})$.

**Bemerkung:** Hier ist $\vec{r}$ keine dynamische Variable, sondern nur ein kontinuierlicher Parameter, der die Feldvariablen parametrisiert, genauso wie $a$ die Teilchenvariablen kennzeichnet.

[(n)] P. A. M. Dirac, 1902–1984

### III.1.2 Maxwell–Lorentz-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld $(\vec{E}, \vec{B})$ im Vakuum in Anwesenheit der durch die Ladungs- bzw. Stromdichte $\rho$ bzw. $\vec{\jmath}$ beschriebenen Quellen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \tag{III.2a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0 \tag{III.2b}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{III.2c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} = \mu_0 \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}). \tag{III.2d}$$

Kombiniert man die Maxwell–Gauß[(o)]- und Maxwell–Ampère[(p)]-Gleichungen (III.2a), (III.2d) zusammen, so erkennt man, dass die Ladungs- und Stromdichte der *Kontinuitätsgleichung*

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = 0} \tag{III.3}$$

genügen, welche die lokale Formulierung der Erhaltung der elektrischen Ladung darstellt.

Schließlich übt ein elektromagnetisches Feld auf jedes Einheitsvolumen einer Verteilung von elektrischen Ladungen und Strömen eine Kraft aus, die *Lorentz-Kraftdichte*, die durch

$$\boxed{\vec{f}_{\text{L}}(t, \vec{r}) = \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r})} \tag{III.4}$$

gegeben wird.

Besteht die Verteilung aus nur einer einzigen Punktladung $q$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, so unterliegt die letztere einer *Lorentz-Kraft*

$$\boxed{\vec{F}_{\text{L}}(t) = q\big[\vec{E}\big(t, \vec{x}(t)\big) + \vec{v}(t) \times \vec{B}\big(t, \vec{x}(t)\big)\big],} \tag{III.5}$$

wobei $\vec{x}(t)$ den Ort der Punktladung zur Zeit $t$ bezeichnet.

Aus den Maxwell-Gleichungen (III.2) in Abwesenheit von Quelltermen folgert man die Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung

$$\Box \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{0} \qquad , \qquad \Box \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{0}, \tag{III.6}$$

mit den zusätzlichen Bedingungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0$, wobei der *d'Alembert*[(q)]*-Operator* $\Box$ gemäß

$$\Box \equiv -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle \tag{III.7}$$

definiert ist. Die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen beschreiben *elektromagnetischen Wellen*, deren (Phasen)Geschwindigkeit

$$\boxed{c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \tag{III.8}$$

beträgt, entsprechend der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

[(o)] C. F. Gauss, 1777–1855 [(p)] A.-M. Ampère, 1775–1836 [(q)] J. le Rond D'Alembert, 1717–1783

**Bemerkung:** Offensichtlich werden hier die Größen und Einheiten des SI-Systems benutzt, in dem die *elektrische Feldkonstante* $\epsilon_0$ und die *magnetische Feldkonstante* $\mu_0$ mit einem Wert ungleich 1 auftreten.

### III.1.3 Elektromagnetische Potentiale. Eichungen

Die Felder $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ können durch ein *Skalarpotential* $\Phi(t,\vec{r})$ und ein *Vektorpotential* $\vec{A}(t,\vec{r})$ ausgedrückt werden:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}, && \text{(III.9a)}\\ \vec{B}(t,\vec{r}) &= \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r}). && \text{(III.9b)}\end{aligned}}$$

Dies deutet darauf hin, dass die 6 Komponenten des elektromagnetischen Feldes in jedem Punkt $\vec{r}$ redundant sind, da die Potentiale $\Phi(t,\vec{r})$ und $\vec{A}(t,\vec{r})$ nur 4 reelle Skalare darstellen.

Setzt man diese Identitäten in die Maxwell–Gauß- und Maxwell–Ampère-Gleichungen (III.2a) und (III.2d) ein, so erhält man für die Potentiale die Bewegungsgleichungen

$$\triangle\Phi(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) \tag{III.10a}$$

oder äquivalent

$$\Box\Phi(t,\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\right], \tag{III.10b}$$

und

$$\Box\vec{A}(t,\vec{r}) = -\mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\right]. \tag{III.10c}$$

#### Eichinvarianz

Die Maxwell-Felder $\vec{E}(t,\vec{r})$, $\vec{B}(t,\vec{r})$ und dadurch die Elektrodynamik bleiben invariant unter einer *Eichtransformation* der Potentiale

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(t,\vec{r}) &\to \Phi'(t,\vec{r}) \equiv \Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\chi(t,\vec{r})}{\partial t}, && \text{(III.11a)}\\ \vec{A}(t,\vec{r}) &\to \vec{A}'(t,\vec{r}) \equiv \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}) && \text{(III.11b)}\end{aligned}}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(t,\vec{r})$ von Zeit und Ort. Somit kann man $\chi(t,\vec{r})$ so wählen, dass die Gleichungen für die Potentiale irgendeine Symmetrie besitzen oder einfacher werden.

Zwei oft benutzte Eichungen sind die *Lorenz*[(r)]*-Eichung*

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\Phi(t,\vec{r})}{\partial t} = 0} \tag{III.12}$$

und — insbesondere in der Elektrostatik — die *Coulomb*[(s)]*-Eichung*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}) = 0. \tag{III.13}$$

Insbesondere vereinfachen sich in der Lorenz-Eichung die Gl. (III.10b) und (III.10c), die dann eine symmetrische Form annehmen.

---

[(r)] L. Lorenz, 1829–1891 [(s)] C. A. Coulomb, 1736?1806

### III.1.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Die Dichte und Stromdichte der Energie bzw. des Impulses des elektromagnetischen Feldes sind gegeben durch

- Energiedichte des Feldes: $$\boxed{e_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big[\vec{E}(t,\vec{r})^2 + c^2\vec{B}(t,\vec{r})^2\Big]} \qquad \text{(III.14a)}$$

- Energiestromdichte (*Poynting*[t]*-Vektor*): $$\boxed{\vec{S}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(t,\vec{r})\times\vec{B}(t,\vec{r})} \qquad \text{(III.14b)}$$

- Impulsdichte: $$\boxed{\vec{g}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \epsilon_0\vec{E}(t,\vec{r})\times\vec{B}(t,\vec{r})} \qquad \text{(III.14c)}$$

- Impulsstromdichte:

$$\boxed{T^{ij}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = \epsilon_0\left[\frac{1}{2}\delta^{ij}\Big(\vec{E}(t,\vec{r})^2 + c^2\vec{B}(t,\vec{r})^2\Big) - E^i(t,\vec{r})E^j(t,\vec{r}) - c^2B^i(t,\vec{r})B^j(t,\vec{r})\right].} \qquad \text{(III.14d)}$$

$T^{ij}_{\text{e.m.}}$ stellt die Dichte des Stroms in Richtung $i$ von der $j$-ten Komponenten des Impulses des elektromagnetischen Feldes dar.

Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen zeigt man, dass diese Dichten die Bilanzgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial e_{\text{e.m.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r}) = -\vec{j}_{\text{el.}}(t,\vec{r})\cdot\vec{E}(t,\vec{r})} \qquad \text{(III.15a)}$$

und

$$\boxed{\frac{\partial g^j_{\text{e.m.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T^{ij}_{\text{e.m.}}(t,\vec{r})}{\partial x^i} = -f^j_{\text{L}}(t,\vec{r}) \quad \text{für } j=1,2,3} \qquad \text{(III.15b)}$$

erfüllen, welche jeweils die lokale Änderung der Energie- und Impulsdichte des Feldes beschreiben.

**Bemerkung:** Der Tensor mit kartesischen Komponenten $T^{ij}_{\text{em}}$ wird auch *Maxwell'scher Spannungstensor* des elektromagnetischen Feldes genannt.[16]

## III.2 Lorentz-kovariante elektromagnetische Größen

Zur Formulierung der Elektrodynamik in relativistisch kovarianter Notation sollen zuerst passende Lorentz-kovariante Größen — Viererskalare, -vektoren oder -tensoren — definiert werden, welche das elektromagnetische Feld (§ III.2.1) mit den zugehörigen Potentialen (§ III.2.2), dessen Quellen (§ III.2.3), sowie dessen Energie und Impuls (§ III.2.4) beschreiben.
Hiernach bezeichnet $\mathsf{x}$ einen Punkt der Raumzeit mit kontravarianten Koordinaten $x^\mu$.

### III.2.1 Elektromagnetischer Feldstärketensor

In relativistisch kovarianter Schreibweise gewinnt die Bezeichnung „elektromagnetisches Feld" ihre volle Bedeutung, indem die elektrische und magnetische Dreiervektorfelder miteinander in ein einzelnes mathematisches Objekt kombiniert werden.

[16] Der Maxwell'sche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_{\text{e.m.}}$ wird auch mit der umgekehrten Vorzeichenkonvention definiert, d.h. $\boldsymbol{\sigma}_{\text{e.m.}} = -\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$.

[t] J. H. Poynting, 1852–1914

### III.2.1 a Definition

Um eine relativistisch kovariante Größe zu erhalten, werden das elektrische und das magnetische Feld $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zum *elektromagnetischen Feldstärketensor* zweiter Stufe $\mathsf{F}$ kombiniert. Letzterer kann durch die Angabe seiner kontravarianten Komponenten

$$\boxed{\begin{aligned} &F^{00}(\mathsf{x}) = F^{ii}(\mathsf{x}) = 0, \\ &F^{0i}(\mathsf{x}) = -F^{i0}(\mathsf{x}) \equiv \frac{E^i(\mathsf{x})}{c}, \\ &F^{ij}(\mathsf{x}) = -F^{ji}(\mathsf{x}) \equiv \sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk} B^k(\mathsf{x}) \end{aligned}} \tag{III.16a}$$

bezüglich eines gegebenen Inertialsystems $\mathcal{B}$ definiert werden. Dabei sind $i, j \in \{1, 2, 3\}$, während $\epsilon^{ijk}$ das dreidimensionale völlig antisymmetrische Levi-Civita-Symbol bezeichnet. Die Komponenten $E^i$, $B^j$ der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind solche, die ein bezüglich $\mathcal{B}$ ruhender Beobachter messen würde.

Die Matrixdarstellung des elektromagnetischen Feldstärketensors $\mathsf{F}$ lautet

$$\boxed{F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{E^1(\mathsf{x})}{c} & \dfrac{E^2(\mathsf{x})}{c} & \dfrac{E^3(\mathsf{x})}{c} \\ -\dfrac{E^1(\mathsf{x})}{c} & 0 & B^3(\mathsf{x}) & -B^2(\mathsf{x}) \\ -\dfrac{E^2(\mathsf{x})}{c} & -B^3(\mathsf{x}) & 0 & B^1(\mathsf{x}) \\ -\dfrac{E^3(\mathsf{x})}{c} & B^2(\mathsf{x}) & -B^1(\mathsf{x}) & 0 \end{pmatrix},} \tag{III.16b}$$

wobei der erste bzw. zweite Index des Tensors dem Zeilen- bzw. Spaltenindex der Matrix entspricht. $F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$ ist offensichtlich antisymmetrisch unter dem Austausch der zwei Indizes

$$F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = -F^{\nu\mu}(\mathsf{x}) \qquad \forall \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}. \tag{III.17}$$

Unter Lorentz-Transformationen $x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} x^\mu$ zwischen Inertialsystemen bzw. Minkowski-Koordinaten transformiert sich der Feldstärketensor wie jeder Tensor vom Typ $\binom{2}{0}$, d.h. gemäß

$$F^{\mu\nu} \to F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} F^{\mu\nu}.$$

Daraus kann man die entsprechenden Transformationen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ folgern.

Für einen drehungsfreien Boost (§ I.2.2 b) mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}$ findet man

$$\vec{E}' = (\vec{e} \cdot \vec{E})\vec{e} + \frac{\vec{e} \times (\vec{E} \times \vec{e}) - \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}}$$

$$\vec{B}' = (\vec{e} \cdot \vec{B})\vec{e} + \frac{\vec{e} \times (\vec{B} \times \vec{e}) + \vec{v} \times \vec{E}/c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}}$$

wobei $\vec{e}$ den Einheitsvektor in Richtung des Boosts bezeichnet.

Sei $\mathsf{u} = \{u^\mu\}_{\mu=0\ldots3}$ die Vierergeschwindigkeit eines Beobachters $\mathcal{B}'$ relativ zum Inertialsystem $\mathcal{B}$. Man kann Vierervektoren $\mathsf{E_u}(\mathsf{x})$ und $\mathsf{B_u}(\mathsf{x})$ durch die Angabe ihrer jeweiligen kontravarianten Komponenten

$$E^\mu_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) \equiv F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) u_\nu \tag{III.18a}$$

$$B^\mu_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) \equiv \frac{1}{2c} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu F_{\rho\sigma}(\mathsf{x}) \tag{III.18b}$$

bezüglich $\mathcal{B}$ definieren, wobei $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ den vierdimensionalen Levi-Civita-Tensor (I.57) bezeichnet. Falls $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ ruht — d.h. $u^0 = -u_0 = 1$ und $u^i = 0$ für $i = 1,2,3$ —, dann sind die räumlichen Komponenten der entsprechenden Vierervektoren $\mathsf{E}_0(\mathsf{x})$ bzw. $\mathsf{B}_0(\mathsf{x})$ gleich den Komponenten in $\mathcal{B}$ der Dreiervektoren $\vec{E}(\mathsf{x})$ bzw. $\vec{B}(\mathsf{x})$, während die 0-Komponenten von $\mathsf{E}_0(\mathsf{x})$ und $\mathsf{B}_0(\mathsf{x})$ Null sind. Allgemeiner stellt $\mathsf{E}_\mathsf{u}(\mathsf{x})$ bzw. $\mathsf{B}_\mathsf{u}(\mathsf{x})$ das elektrische bzw. magnetische Feld relativ zum Ruhesystem des Beobachters $\mathcal{B}'$ dar, wie es vom Bezugssystem $\mathcal{B}$ aus gesehen aussieht.

### III.2.1 b Dualer Feldstärketensor

Mithilfe des vierdimensionalen Levi-Civita-Tensors definiert man noch den *dualen elektromagnetischen Feldstärketensor* $\tilde{\mathsf{F}}$, dessen kontravariante Komponenten durch

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(\mathsf{x})} \tag{III.19a}$$

definiert sind. In Matrixdarstellung ergibt sich[17]

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & B^1(\mathsf{x}) & B^2(\mathsf{x}) & B^3(\mathsf{x}) \\ -B^1(\mathsf{x}) & 0 & -\frac{E^3(\mathsf{x})}{c} & \frac{E^2(\mathsf{x})}{c} \\ -B^2(\mathsf{x}) & \frac{E^3(\mathsf{x})}{c} & 0 & -\frac{E^1(\mathsf{x})}{c} \\ -B^3(\mathsf{x}) & -\frac{E^2(\mathsf{x})}{c} & \frac{E^1(\mathsf{x})}{c} & 0 \end{pmatrix}.} \tag{III.19b}$$

Relativ zu den Komponenten $F^{\mu\nu}$ von $\mathsf{F}$ folgen die $\tilde{F}^{\mu\nu}$ aus den Substitutionen $E^i/c \to B^i$ und $B^i \to -E^i/c$.

Der duale Feldstärketensor ist deutlich antisymmetrisch.

**Bemerkungen:**

∗ Die Komponenten des in Gl. (III.18) eingeführten Vierervektors $\mathsf{B}_\mathsf{u}(\mathsf{x})$ lassen sich einfacher als

$$B^\mu_\mathsf{u}(\mathsf{x}) \equiv \frac{1}{c}\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x})u_\nu$$

schreiben. Wiederum gilt $E^\mu_\mathsf{u}(\mathsf{x}) \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}u_\nu\tilde{F}_{\rho\sigma}(\mathsf{x})$.

∗ Der „biduale“ Feldstärketensor mit Komponenten $\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}$ ist einfach $-\mathsf{F}$.

### III.2.1 c Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Aus dem Feldstärketensor (III.16) und seinem Dual (III.19) lassen sich durch Kontraktionen zwei unabhängige Größen finden, die sich unter Transformationen zwischen Inertialsystemen nicht ändern, d.h. zwei Lorentz-Skalaren, und zwar

$$F_{\mu\nu}(\mathsf{x})F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = 2\left[\vec{B}(\mathsf{x})^2 - \frac{\vec{E}(\mathsf{x})^2}{c^2}\right] \tag{III.20a}$$

und

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathsf{x})F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = -4\frac{\vec{E}(\mathsf{x})\cdot\vec{B}(\mathsf{x})}{c}. \tag{III.20b}$$

Die dritte natürliche Möglichkeit $\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathsf{x})\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathsf{x})$ ist nicht unabhängig von den zwei ersten, sondern gleich $-F_{\mu\nu}(\mathsf{x})F^{\mu\nu}(\mathsf{x})$.

[17] Dabei muss die Leserin darauf aufpassen, dass numerisch $F_{0i} = -F_{i0} = -F^{0i} = -E^i/c$ und $F_{ij} = F^{ij}$ gelten, wie sich aus $F_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu}F^{\mu\nu}$ berechnen lässt.

### III.2.2 Viererpotential

Das Skalarpotential $\Phi$ und das Vektorpotential $\vec{A}$ bilden einen Vierervektor, das *Viererpotential*, mit den kontravarianten Komponenten

$$\boxed{\mathsf{A}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Phi(\mathsf{x})}{c} \\ \vec{A}(\mathsf{x}) \end{pmatrix}.} \tag{III.21}$$

Der elektromagnetische Feldstärketensor (III.16) lässt sich dadurch ausdrücken gemäß

$$\boxed{F^{\mu\nu}(\mathsf{x}) = \partial^\mu A^\nu(\mathsf{x}) - \partial^\nu A^\mu(\mathsf{x}),} \tag{III.22}$$

wobei $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$, d.h. $\partial^0 = -(1/c)\partial/\partial t$ während $\partial^i$ die $i$-te Komponente des Gradienten ist. Dementsprechend stellen die Beziehungen

$$\frac{E^i}{c} = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial}{x^i}\left(\frac{\Phi}{c}\right)$$
$$B^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{ijk} F^{jk} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{ijk}\partial^j A^k = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{ijk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

jeweils die $i$-te Komponente der Gleichung (III.9a) und (III.9b) dar.

#### Eichinvarianz

In relativistisch kovarianter Schreibweise lautet die Eichtransformation (III.11)

$$A^\mu(\mathsf{x}) \to A'^\mu(\mathsf{x}) = A^\mu(\mathsf{x}) + \partial^\mu\chi(\mathsf{x}), \tag{III.23}$$

mit einer zweimal kontinuierlich differenzierbaren skalaren Funktion $\chi(\mathsf{x})$. Für solche Funktionen gilt $\partial^\mu\partial^\nu\chi(\mathsf{x}) = \partial^\nu\partial^\mu\chi(\mathsf{x})$, so dass die Viererpotentiale $\mathsf{A}$ und $\mathsf{A}'$ über Beziehung (III.22) zum gleichen Feldstärketensor $\mathbf{F}$ führen, wie zu erwarten war.

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ [Gl. (III.8)] wird die Bedingung (III.12), welche die Lorenz-Eichung definiert, zu

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu(\mathsf{x}) = 0.} \tag{III.24}$$

Dabei ist deutlich, dass diese Eichbedingung Lorentz-invariant ist, d.h. sie bleibt in allen Inertialsystemen erfüllt. Dagegen gilt diese Eigenschaft nicht für die Coulomb-Eichbedingung (III.13), für die es keine Lorentz-kovariante Formulierung gibt.

### III.2.3 Elektrischer Viererstrom

Die elektrischen Ladungs- und Stromdichte bilden einen Vierervektor $\mathsf{J}_{\text{el.}}(\mathsf{x})$, der als *elektrischer Viererstrom* bzw. *Viererstromdichte* — was genauer ist — bezeichnet wird:

$$\boxed{\mathsf{J}_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} \rho_{\text{el.}}(\mathsf{x})c \\ \vec{j}_{\text{el.}}(\mathsf{x}) \end{pmatrix}.} \tag{III.25a}$$

Komponentenweise entspricht dies

$$\boxed{J^0_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = \rho_{\text{el.}}(\mathsf{x})c, \quad J^i_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = j^i_{\text{el.}}(\mathsf{x}) \text{ für } i = 1,2,3.} \tag{III.25b}$$

Dabei bezeichnen $\rho_{\text{el.}}$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ die bekannten „nicht-relativistischen“ Größen in einem festen Bezugssystem, relativ zu dem sich die Ladungen möglicherweise bewegen.

Für eine Punktladung $q$ mit Weltlinie bzw. Vierergeschwindigkeit $\big(t,\vec{x}(t)\big)$ bzw. $\mathsf{u} = \mathrm{d}\mathsf{x}/\mathrm{d}\tau$, mit der Eigenzeit $\tau$ der Punktladung, gilt

$$\mathsf{J}_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = q\delta^{(3)}\big(\vec{r}-\vec{x}(t)\big)\,\mathsf{u}(\mathsf{x}) = \varrho_0(\mathsf{x})\,\mathsf{u}(\mathsf{x}), \tag{III.26a}$$

wobei $\varrho_0(\mathsf{x})$ die Ladungsdichte im Ruhesystem der Punktladung bezeichnet. Unter Berücksichtigung des Ausdrucks (I.38) der Vierergeschwindigkeit lautet dies noch

$$\mathsf{J}_{\text{el.}}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} \varrho_0(\mathsf{x})\gamma c \\ \varrho_0(\mathsf{x})\gamma\vec{v} \end{pmatrix} \tag{III.26b}$$

mit dem Lorentz-Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\vec{v}^{\,2}/c^2}$.

### III.2.4 Energieimpulstensor

Die Energiedichte $e_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14a)], der Poynting-Vektor $\vec{S}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14b)], die Impulsdichte $\vec{g}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14c)] und die Impulsstromdichte $\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$ [Gl. (III.14d)] des elektromagnetischen Feldes lassen sich in einen Vierertensor zweiter Stufe $\mathbf{T}_{\text{e.m.}}$, den *Energieimpulstensor* des Feldes, kombinieren. In Matrixdarstellung lautet dieser

$$T^{\mu\nu}_{\text{e.m.}}(\mathsf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} e_{\text{e.m.}}(\mathsf{x}) & c\vec{g}_{\text{e.m.}}(\mathsf{x}) \\ \hline \dfrac{\vec{S}_{\text{e.m.}}(\mathsf{x})}{c} & \mathbf{T}_{\text{e.m.}}(\mathsf{x}) \end{array}\right). \tag{III.27a}$$

Der Energieimpulstensor lässt sich auch durch den Feldstärketensor (III.16) ausdrücken, und zwar komponentenweise

$$T^{\mu\nu}_{\text{e.m.}}(\mathsf{x}) = \frac{1}{\mu_0}\left[-F^{\mu}{}_{\rho}(\mathsf{x})F^{\rho\nu}(\mathsf{x}) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(\mathsf{x})F^{\rho\sigma}(\mathsf{x})\right], \tag{III.27b}$$

mit $\eta^{\mu\nu}$ den Komponenten des inversen metrischen Tensors. In dieser Form prüft man einfach, dass der Energieimpulstensor symmetrisch ist.