I.3.2 c Viererprodukt

Seien V^μ bzw. W_μ die Komponenten eines kontravarianten bzw. kovarianten Vierervektors. Die Transformationsgesetze (I.31a) und (I.38) zeigen, dass die Kombination $W_\mu V^\mu$, mit Summe über $\mu = 0, 1, 2, 3$, ein Lorentz-Skalar ist. Dieses Skalar wird *Viererprodukt* der beiden Vierervektoren genannt, oder auch *Lorentz-Skalarprodukt* — etwa uneigentlich, da es sich eher um ein Pseudo-Skalarprodukt handelt.

Da $W_\mu V^\mu = W^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu = W^\nu V_\nu = W^\mu V_\mu$ ist, spielt es hier keine Rolle, welcher Index oben und welcher unten ist, so lange es einen oben und einen unten gibt. Komponentenweise gilt

$$W_\mu V^\mu = -W^0 V^0 + W^1 V^1 + W^2 V^2 + W^3 V^3 = W^\mu V_\mu. \tag{I.44a}$$

Unter Verwendung der Matrixdarstellungen $\underset{\sim}{\mathsf{W}}$ bzw. V für den kovarianten bzw. kontravarianten Vierervektor, lässt sich das Viererprodukt noch als $W_\mu V^\mu = \underset{\sim}{\mathsf{W}}\,\mathsf{V}$ schreiben. Ein Nachteil dieser Schreibweise ist, dass die Multiplikation zweier Matrizen nicht-kommutativ ist: $\underset{\sim}{\mathsf{W}}\,\mathsf{V}$ ist eine Zahl, $\mathsf{V}\,\underset{\sim}{\mathsf{W}}$ eine 4×4-Matrix. Das heißt, der Gleichung $W_\mu V^\mu = W^\mu V_\mu$ entspricht $\underset{\sim}{\mathsf{W}}\,\mathsf{V} = \underset{\sim}{\mathsf{V}}\,\mathsf{W}$, wobei die Symmetrie bezüglich des Austauschs der Vierervektoren verloren wird. Somit führt man eine weitere Notation, ähnlich dem Skalarprodukt von zwei Dreiervektoren im euklidischen Raum:

$$W_\mu V^\mu = \underset{\sim}{\mathsf{W}}\,\mathsf{V} \equiv \mathsf{W} \cdot \mathsf{V}. \tag{I.44b}$$

Dann gilt problemlos $\mathsf{W} \cdot \mathsf{V} = \mathsf{V} \cdot \mathsf{W}$. Man sollte aber dabei nicht vergessen, dass es sich trotz der Notation um das *Lorentz*-Skalarprodukt handelt, nicht um das euklidische, d.h. dass es ein Minus-Zeichen vor dem Produkt der zeitlichen Komponenten gibt.

Bemerkung: Im Gegensatz zum Viererprodukt $W_\mu V^\mu$ sind die Kombinationen $W^\mu V^\mu$ und $W_\mu V_\mu$ keine Skalare unter Lorentz-Transformation, d.h. sie nehmen unterschiedliche Werte in unterschiedlichen Inertialsystemen an.

Ein erstes Beispiel von Viererprodukt ist die Kombination $\partial_\mu j^\mu(\mathsf{x})$, mit den Komponenten ∂_μ des Vierergradienten und den Koordinaten $j^\mu(\mathsf{x})$ eines Feldes, das in jedem Punkt x eines Gebiets der Raumzeit $\mathscr{M}_4$ definiert ist:

$$\partial_\mu j^\mu(\mathsf{x}) = \frac{\partial j^\mu(\mathsf{x})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j^0(\mathsf{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1(\mathsf{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2(\mathsf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3(\mathsf{x})}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial j^0(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}(t,\vec{r}), \tag{I.45}$$

wobei der Dreiervektor $\vec{\jmath}$ die räumlichen Komponenten j^i des Vierervektors j zusammenfasst, während $\vec{\nabla}\cdot$ die (Dreier-)Divergenz dieses Vektorfeldes darstellt. In Analogie mit dem dreidimensionalen Fall heißt $\partial_\mu j^\mu(\mathsf{x}) \equiv \boldsymbol{\partial} \cdot \mathsf{j}(\mathsf{x})$ *Viererdivergenz* des Vierervektorfeldes j.

Lorentz-Quadrat

Ein weiteres, wichtiges Beispiel von Viererprodukt ist das skalare *Lorentz-Quadrat* eines Vierervektors:

$$\mathsf{V}^2 \equiv V_\mu V^\mu = -\big(V^0\big)^2 + \big(V^1\big)^2 + \big(V^2\big)^2 + \big(V^3\big)^2, \tag{I.46}$$

das denselben Wert in allen Inertialsystemen annimmt. Beispielsweise beträgt das Lorentz-Quadrat einer Vierergeschwindigkeit (I.32) immer $\mathsf{u}^2 = u_\mu u^\mu = -c^2$. Das Linienelement $\mathrm{d}s^2$ ist ebenfalls ein Lorentz-Quadrat.

Definition: Je nach dem Vorzeichen des Lorentz-Quadrats unterscheidet man zwischen drei Arten von Vierervektoren:

- *zeitartige* Vierervektoren, mit negativem Lorentz-Quadrat $\mathsf{V}^2 < 0$;
- *lichtartige* Vierervektoren, auch *Nullvektoren* genannt, mit Lorentz-Quadrat $\mathsf{V}^2 = 0$;
- *raumartige* Vierervektoren, mit positivem Lorentz-Quadrat $\mathsf{V}^2 > 0$.

Zum Beispiel ist die Vierergeschwindigkeit eines Massenpunktes ein zeitartiger Vierervektor.

I.3.3 Vierertensoren

Auf dem euklidischen Raum $\mathscr{E}_3$ der nicht-relativistischen Mechanik gibt es „Dreier-“Tensoren höherer Stufe, die sich unter Drehungen alle gleich transformieren. Ähnlich existieren auf der Minkowski-Raumzeit $\mathscr{M}_4$ *Vierertensoren* bzw. *Lorentz-Tensoren* mit bestimmten Transformationsgesetzen unter Lorentz-Transformationen.

Diese Vierertensoren können vom Typ $\binom{m}{n}$, oder „m-fach kontravariant und n-fach kovariant“, sein, d.h. ihre Komponenten besitzen $m \geq 0$ kontravariante und $n \geq 0$ kovariante Indizes, wobei jeder Index sich wie ein entsprechender Vierervektor transformiert. Beispielsweise transformiert sich der Vierertensor dritter Stufe mit Komponenten $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$ wie $V^{\mu}V^{\nu}V_{\rho}$.

Insbesondere lautet das Transformationsgesetz für einen Lorentz-Tensor vom Typ $\binom{0}{2}$, unter Verwendung der Gl. (I.38),

$$T_{\mu\nu} \to T_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,T_{\mu\nu}. \tag{I.47a}$$

In Matrixform kann ein solcher Vierertensor zweiter Stufe durch eine quadratische 4×4-Matrix T mit Elementen $T_{\mu\nu}$ dargestellt werden; dann lautet die Transformation

$$\mathsf{T} \to \mathsf{T}' = \Lambda^{\mathsf{T}}\,\mathsf{T}\,\Lambda, \tag{I.47b}$$

wie aus der Gleichung $\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,T_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,T_{\mu\nu}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'} = (\Lambda^{\mathsf{T}})_{\mu'}{}^{\mu}\,T_{\mu\nu}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}$ sofort folgt.

I.3.3 a Metrischer Tensor

Der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ wurde schon in Gl. (I.19) über die Angabe seiner Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ in einem bestimmten System von Minkowski-Koordinaten definiert. Jede dieser Komponenten nimmt in allen solchen Systemen denselben Wert an, d.h. der metrische Tensor ist *invariant* unter Lorentz-Transformationen.

Unter Verwendung des Transformationsgesetzes (I.47a) transformieren sich die Komponenten von $\boldsymbol{\eta}$ gemäß

$$\eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,\eta_{\mu\nu}, \tag{I.48a}$$

entsprechend in Matrixdarstellung

$$\eta \to \eta' = \Lambda^{\mathsf{T}}\,\eta\,\Lambda. \tag{I.48b}$$

Fördert man die Invarianz des metrischen Tensors unter Lorentz-Transformationen, so sollen die Matrizen η und η' gleich sein, woraus sich Bedingung (I.23) ergibt.

I.3.3 b Inverser metrischer Tensor

Dem metrischen Tensor wird der *inverse metrische Tensor* $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ zugeordnet, dessen Komponenten $\eta^{\mu\nu}$ bzw. Matrixdarstellung η^{-1} derart sind, dass

$$\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \eta^{\nu\rho}\eta_{\rho\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad \forall \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad \text{bzw.} \quad \eta\eta^{-1} = \eta^{-1}\eta = \mathbb{1}_4 \tag{I.49}$$

gelten, wobei $\mathbb{1}_4$ die 4×4-Einheitsmatrix bezeichnet. Dabei ist eigentlich $\eta^{-1} = \eta$, d.h. numerisch gilt $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ für alle möglichen Werte von μ und ν.

Wie in § I.3.2 b schon gesehen wurde lassen sich mithilfe des metrischen bzw. des inversen metrischen Tensors mit Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ bzw. $\eta^{\mu\nu}$ kontra- bzw. kovariante Lorentz-Indizes herauf- bzw. herabziehen, vgl. Gl. (I.39) und (I.40). Zum Beispiel kann man aus einem Tensor vom Typ $\binom{0}{2}$ mit Komponenten $T_{\mu\nu}$ verwandte Tensoren von den Typen $\binom{1}{1}$ und $\binom{2}{0}$ erhalten:

$$T_{\mu}{}^{\sigma} \equiv \eta^{\sigma\nu}\,T_{\mu\nu}, \quad T^{\rho}{}_{\nu} \equiv \eta^{\rho\mu}\,T_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad T^{\rho\sigma} \equiv \eta^{\rho\mu}\,\eta^{\sigma\nu}T_{\mu\nu} = \eta^{\rho\mu}\,T_{\mu}{}^{\sigma} = \eta^{\sigma\nu}\,T^{\rho}{}_{\nu}. \tag{I.50}$$

Wenn $T_{\mu\nu}$ nicht symmetrisch ist, sind die Tensoren mit Komponenten $T_{\mu}{}^{\sigma}$ und $T^{\rho}{}_{\nu}$ a priori unterschiedlich.[9]

[9] Bezeichnet T die Matrixdarstellung des Tensors mit Komponenten $T_{\mu\nu}$, so sind die drei anderen Tensoren jeweils durch $\mathsf{T}\eta$, $\eta\mathsf{T}$ und $\eta\mathsf{T}\eta$ dargestellt, wie die Leserin einfach nachprüfen kann.

Angewandt auf $\eta^{\mu\nu}$ selber lautet die zweite der Gleichungen (I.50)

$$\eta^{\rho}{}_{\nu} \equiv \eta^{\rho\mu}\,\eta_{\mu\nu}. \tag{I.51}$$

Der Vergleich mit Gl. (I.49) gibt dann $\eta^{\rho}{}_{\nu} = \delta^{\rho}_{\mu}$.

I.3.3 c Levi-Civita-Symbol

Ein anderer „invarianter Vierertensor" — solange man nur orthonormierte Koordinatensysteme betrachtet — ist das vollständig antisymmetrische *Levi-Civita*[j]*-Symbol*[10]

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}} \tag{I.52}$$

Hier sollte beachtet werden, dass $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$, während für das dreidimensionale Levi–Civita Tensor $\epsilon_{123} = \epsilon^{123}$ gilt.

Unter einer Lorentz-Transformation Λ transformiert sich dieses Symbol gemäß

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \to \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\,\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\,\Lambda^{\rho'}{}_{\rho}\,\Lambda^{\sigma'}{}_{\sigma}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = (\det\Lambda)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{I.53}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Definition der Determinante folgt. Somit sieht man, dass sich das Vorzeichen unter uneigentlichen Lorentz-Transformationen ändert.

I.3.3 d Kontraktion zweier Tensoren

Das Herauf- oder Herabziehen von Indizes mithilfe des metrischen Tensors oder seines Inversen sind Beispiele von Tensorverjüngungen. Allgemeiner können zwei Tensoren T und T' kontrahiert werden, vorausgesetzt der eine (mindestens) einen kovarianten und der andere einen kontravarianten Index hat. Dann wird über solche Indizes kontrahiert, wie z.B. $T^{\mu\nu}T'_{\mu\rho}$ (einfache Kontraktion) oder $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\mu\nu}$ (doppelte Kontraktion).

I.3.4 Kovariante Formulierung eines physikalischen Gesetzes

Laut dem ersten einsteinschen Postulat (I.3) sollen die Naturgesetze mathematisch so formuliert werden, dass die entsprechenden Gleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen. Theorien, die diesem Prinzip genügen, werden als Lorentz- oder relativistisch *kovariant* bezeichnet.

Infolgedessen können Gleichungen in Lorentz-kovarianten Theorien nur Identitäten zwischen Lorentz-Tensoren gleiches Typs sein, nachdem alle möglichen Kontraktionen der Indizes berücksichtigt wurden. Solche Gleichungen können entweder „geometrisch", in Matrixdarstellung (für Vierertensoren der Stufe 1 oder 2) oder komponentenweise geschrieben werden.

Ein einfaches Beispiel einer kovarianten Gleichung ist somit $\mathsf{V} = \mathsf{W}$ oder äquivalent $V^\mu = W^\mu$ — wobei die Gleichung für alle $\mu = 0,1,2,3$ gelten muss, obwohl das oft nicht explizit geschrieben wird. Ein anderes Beispiel ist $\mathsf{T}\mathsf{V} = \mathsf{W}$ bzw. komponentenweise $T^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu} = W^{\mu}$. Unter einer Lorentz-Transformation transformieren sich diese Beispiele in $\mathsf{V}' = \mathsf{W}'$ bzw. $V^{\mu'} = W^{\mu'}$ oder $\mathsf{T}'\mathsf{V}' = \mathsf{W}'$ bzw. $T^{\mu'}{}_{\nu'}V^{\nu'} = W^{\mu'}$, d.h. sie nehmen die gleiche Form an.

Dagegen sind Identitäten wie $V^\mu = T^{\mu}{}_{\nu}$ oder $V^\mu = W_\mu$ keine gültige relativistisch kovariante Gleichungen, sondern können einen (Tipp-?)Fehler signalisieren...

Bemerkung: Manchmal wird statt Lorentz-kovariant die Redensart „Lorentz-invariant" verwendet. Streng genommen bedeutet aber die Letztere, dass die Gleichungen unverändert unter den Lorentz-Transformationen bleiben: dies stellt eine stärkere Bedingung dar, als die Invarianz der Form der

[10] Einige Autoren benutzen die Konvention $\epsilon_{0123} = +1$, entsprechend $\epsilon^{0123} = -1$...

[j] T. Levi-Civita, 1873–1941

Gleichungen, die nur im Fall einer Gleichung zwischen zwei skalaren Größen erfüllt ist, wie z.B. $\mathsf{u}^2 = -c^2$ (für das Lorentz-Quadrat einer Vierergeschwindigkeit).