I.3 Vierervektoren und Vierertensoren

Die in Abschn. I.2 eingeführten Lorentz-Transformationen geben die Beziehungen zwischen den Minkowski-Koordinaten eines gegebenen Ereignisses bezüglich zwei verschiedener Inertialsysteme $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. In diesem Übergang von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ können sich die mathematischen Darstellungen physikalischer Größen nicht nur wie der Viererortsvektor x, sondern auch anders transformieren.

Der Kürze halber wird hiernach die Redensart „unter Lorentz-Transformationen“ statt „im Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen“ verwendet, wobei die besagte Transformation diejenige für die Viererortsvektoren [Gl. (I.28)] ist.

I.3.1 Lorentz-Skalare

Definition: Ein *Lorentz-Skalar* oder *Viererskalar* ist eine Größe, die invariant unter Transformationen von einem Inertialsystem zu einem anderen ist.

Ein erstes Beispiel davon ist (definitionsgemäß!) das Linienelement (I.6) bzw. (I.20). Demzufolge ist das durch Gl. (I.25) gegebene Eigenzeitelement $\mathrm{d}\tau$ ebenfalls ein Lorentz-Skalar.
Ein weiteres Beispiel ist das *Vierervolumenelement* $\mathrm{d}^4\mathsf{x}$, definiert durch

$$\mathrm{d}^4\mathsf{x} \equiv \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3. \tag{I.27}$$

Wenn der 4-Ortsvektor sich gemäß $\mathsf{x} \to \mathsf{x}' = \Lambda\mathsf{x}$ transformiert, entsprechend Gl. (I.28b) für die Koordinaten, transformiert sich das 4-Volumenelement gemäß

$$\mathrm{d}^4\mathsf{x} \to \mathrm{d}^4\mathsf{x}' = |\det\Lambda|\,\mathrm{d}^4\mathsf{x},$$

woraus das Ergebnis dank $|\det\Lambda| = 1$ folgt.

Hiernach werden wir auf weitere Lorentz-Skalare treffen.

Bemerkung: Man definiert auch *Lorentz-Pseudoskalare*, die invariant unter der eigentlichen Lorentz-Gruppe sind, jedoch unter uneigentlichen Transformationen wie Raumspiegelung oder Zeitumkehr ihr Vorzeichen ändern.

I.3.2 Vierervektoren

Der Viererortsvektor x mit Komponenten x^μ [Gl. (I.17)] ist ein erstes Beispiel von Vierervektor, der sich im Übergang von einem Inertialsystem $\mathcal{B}$ zu einem zweiten Inertialsystem $\mathcal{B}'$ gemäß

$$\mathsf{x} \to \mathsf{x}' = \Lambda\mathsf{x} \tag{I.28a}$$

mit Λ einer Lorentz-Transformation transformiert, entsprechend für die Koordinaten

$$x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\,x^\nu \quad \text{für } \mu' = 0', 1', 2', 3'. \tag{I.28b}$$

Wie es sich herausstellt, gibt es zwei unterschiedliche Arten von Vierervektoren, die sich entweder wie x oder wie der damit assoziierte Vierergradient transformieren.

Bemerkungen:

∗ Aus Gl. (I.28b) folgt die Beziehung

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \quad \forall \mu', \nu. \tag{I.29}$$

∗ In der Tat sind die Lorentz-Transformationen nicht die einzigen linearen Transformationen, die das Linienelement (I.6) invariant lassen. Daneben gibt es noch die affinen Transformationen der *Poincaré*[(i)]*-Gruppe* (oder *inhomogenen Lorentz-Gruppe*) ISO(1,3), der Form

$$\mathsf{x} \to \mathsf{x}' = \Lambda\mathsf{x} + \mathsf{b} \tag{I.30a}$$

[(i)] H. Poincaré, 1854–1912

mit einem beliebigen konstanten Vierervektor b; komponentenweise lautet diese Transformation

$$x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu + b^{\mu'}. \tag{I.30b}$$

Die Poincaré-Transformationen mit $\Lambda = \mathbb{1}_4$ und beliebigem b sind offensichtlich die Raumzeit-Translationen.

I.3.2 a Kontravariante Vierervektoren

Definition: Ein sog. *kontravarianter Vierervektor* V ist eine Menge aus vier Zahlen V^μ, die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Koordinaten x^μ des Viererortsvektors transformieren, d.h.

$$\boxed{V^\mu \to V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu V^\nu,} \tag{I.31a}$$

oder in Matrixform

$$\mathsf{V} \to \mathsf{V}' = \Lambda \mathsf{V}. \tag{I.31b}$$

Ein Beispiel ist die *Vierergeschwindigkeit* u eines massiven Teilchens (Massenpunktes) entlang seiner Weltlinie $\mathsf{x}(s)$, die als

$$\mathsf{u} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathsf{x}(s)}{\mathrm{d}\tau} \tag{I.32a}$$

definiert ist, mit s einer Parametrisierung der Weltlinie und τ der Eigenzeit des Teilchens. Komponentenweise lautet diese Definition

$$\mathsf{u}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}X^\mu(s)}{\mathrm{d}\tau} \tag{I.32b}$$

wobei u^μ bzw. $x^\mu(s)$ mit $\mu = 0,1,2,3$ die Koordinaten der Vierergeschwindigkeit bzw. der Weltlinie sind. Dass u ein kontravarianter Vierervektor ist, folgt aus der Tatsache, dass das Eigenzeitelement $\mathrm{d}\tau$ im Zähler ein Lorentz-Skalar ist.

Wenn v^i mit $i = 1,2,3$ die Komponenten der dreidimensionalen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens und γ den damit assoziierten Lorentz-Faktor bezeichnen, dann lauten die Koordinaten der Vierergeschwindigkeit $u^0 = \gamma c$ und $u^i = \gamma v^i$ für $i = 1,2,3$, d.h.

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}. \tag{I.33}$$

Bemerkung: Für ein masseloses Teilchen, z.B. ein Photon, wird die Vierergeschwindigkeit nicht definiert, da solche Teilchen kein Ruhesystem haben, in welchem die Eigenzeit definiert werden kann: sie bewegen sich entlang lichtartige Weltlinien.

I.3.2 b Kovariante Vierervektoren

Seien

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \tag{I.34a}$$

die Komponenten des *Vierergradient*-Operators:

$$\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ für } i = 1,2,3, \tag{I.34b}$$

wobei die drei räumlichen Komponenten genau die Koordinaten des dreidimensionalen Gradienten sind.

Mithilfe der Kettenregel gilt unter der Transformation (I.28)

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\rho'}} = \Lambda^{\rho'}{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^{\rho'}} = \Lambda^{\rho'}{}_\nu \partial_{\rho'}. \tag{I.35}$$

Sei $\Lambda^{\mu}{}_{\rho'}$ das (μ,ρ')-Element der inversen Matrix Λ^{-1}, d.h.

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho'}\Lambda^{\rho'}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad \text{und} \quad \Lambda^{\mu'}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}, \tag{I.36}$$

wobei δ^{μ}_{ν} das übliche Kronecker-Symbol ist. Multipliziert man Gl. (I.35), die für jedes $\nu \in \{0,1,2,3\}$ gilt, mit $\Lambda^{\nu}{}_{\mu'}$ und summiert man über ν, so ergibt sich

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\,\partial_{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\Lambda^{\rho'}{}_{\nu}\,\partial_{\rho'} = \delta^{\rho'}_{\mu'}\,\partial_{\rho'},$$

d.h.

$$\partial_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\,\partial_{\nu}. \tag{I.37}$$

Somit transformiert sich der Vierergradient mit Λ^{-1}, wenn sich der Ortsvektor mit Λ transformiert.

Definition: Ein *kovarianter Vierervektor* ist eine Menge aus vier Größen W_{μ}, die sich unter Lorentz-Transformationen wie die Komponenten ∂_{μ} des Vierergradienten verhalten, d.h.

$$\boxed{W_{\mu} \to W_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\,W_{\nu}.} \tag{I.38}$$

Jedem kontravarianten Vierervektor mit Koordinaten V^{μ} kann man einen kovarianten Vierervektor mit Komponenten V_{μ} gemäß

$$\boxed{V_{\mu} = \eta_{\mu\nu}V^{\nu}} \tag{I.39}$$

zuordnen.

In einer Basistransformation ändern sich die V^{ν} bzw. $\eta_{\mu\nu}$ gemäß

$$V^{\nu} \to V^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}{}_{\rho}V^{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,\eta_{\mu\nu}$$

vgl. Gl. (I.31a) bzw. (I.48). Dann kommt

$$V_{\mu} \to V_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu'}V^{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho}V^{\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,\eta_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\rho}V^{\rho},$$

wobei die letzte Gleichung aus Gl. (I.36) folgt. Schreibt man dann $\eta_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\rho}V^{\rho} = \eta_{\mu\nu}V^{\nu} = V_{\mu}$, so ergibt sich

$$V_{\mu} \to V_{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,V_{\mu},$$

was zu beweisen war. □

Umgekehrt kann mit jedem kovarianten Vierervektor mit Komponenten V_{μ} der kontravariante Vierervektor mit Komponenten

$$\boxed{V^{\mu} = \eta^{\mu\nu}V_{\nu}} \tag{I.40}$$

assoziiert werden, mit $\eta^{\mu\nu}$ den Komponenten des inversen metrischen Tensors $\boldsymbol{\eta}^{-1}$, die numerisch gleich den $\eta_{\mu\nu}$ sind, vgl. § I.3.3 b. Unter Verwendung des metrischen Tensors (I.19) findet man

$$V_0 = -V^0, \quad V_1 = V^1, \quad V_2 = V^2, \quad V_3 = V^3. \tag{I.41}$$

Bemerkungen:

∗ Bezeichnet man den 4-komponentigen Zeilenvektor mit Koordinaten W_{μ} mit $\underset{\sim}{\mathsf{W}}$, so lässt sich die Transformation (I.38) noch in Matrixdarstellung als

$$\underset{\sim}{\mathsf{W}} \to \underset{\sim}{\mathsf{W}}' = \underset{\sim}{\mathsf{W}}\Lambda^{-1} \tag{I.42}$$

schreiben. Dann lautet Gl. (I.39) bzw. (I.40)

$$\underset{\sim}{\mathsf{V}} = \mathsf{V}^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{V} = \eta^{-1}\underset{\sim}{\mathsf{V}}^{\mathsf{T}}, \tag{I.43}$$

wobei η^{T} in der ersten Gleichung durch η ersetzt werden kann, weil der metrische Tensor — und damit seine Matrixdarstellung — symmetrisch ist. Mit dieser Änderung ist die zweite Gleichung die transponierte der ersten.

$*$ Kontravariante und kovariante Vierervektoren sind Elemente unterschiedlicher Vektorräume, auch wenn sie die gleiche physikalische Dimension haben — wie z.B. kontravariante und kovariante Vierergeschwindigkeiten. Der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ und sein Inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ bilden zwar eine Bijektion zwischen diesen Vektorräumen, so dass man kurz nur von „Vierervektoren" sprechen kann, ohne kontra- oder kovariant zu präzisieren. Man darf aber kontra- und kovariante Vektoren nicht miteinander addieren oder gleich setzen: Ausdrücke wie $a^\mu + b_\mu$ oder $a^\mu = b_\mu$ sind sinnlos — wenn es sich dabei nicht um numerische Gleichungen handelt, die nur in einem Bezugssystem gelten.