I.2.3 Minkowski-Raum

Wegen der Absolutheit von Zeit und Raum in der klassischen Mechanik faktorisiert sich die zugehörige nicht-relativistische Raumzeit in das Produkt einer eindimensionalen Zeit-Geraden mit dem dreidimensionalen euklidischen Ortsraum $\mathscr{E}_3$. Dagegen mischen die Lorentz-Boosts die zeitlichen und räumlichen Koordinaten miteinander. Demzufolge lohnt es sich, die Zeit und die drei Ortskoordinaten als Komponenten eines Vektors in einer vierdimensionalen reellen Raumzeit $\mathscr{M}_4$.

Dann wird ein Punkt von $\mathscr{M}_4$, entsprechend einem Zeitpunkt und einem Ort im (dreidimensionalen) Raum, *Ereignis* genannt.

I.2.3 a Viererortsvektor

Sei $\mathcal{B}$ ein Bezugssystem, versehen mit einem Koordinatensystem, wobei die räumlichen Koordinaten kartesisch sind. Nach deren Angabe lässt sich ein Ereignis durch seinen *Viererortsvektor* x mit Komponenten x^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ charakterisieren, wobei $x^0 \equiv ct$, während die x^i mit $i = 1, 2, 3$ die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{r}$ sind. Der Kurze halber wird hiernach für die Zerlegung in Zeit- und Ortskoordinaten die Notation

$$\mathsf{x} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \tag{I.17}$$

benutzt.

Definition: Die Trajektorie eines Massenpunktes in der Raumzeit heißt *Weltlinie*.

Zur graphischen Darstellung einer Weltlinie — oder allgemeiner zur Veranschaulichung von relativistischen kinematischen Effekte — werden *Minkowski*[(h)]*-Diagramme* verwendet. Ein solches Diagramm ist ein zweidimensionaler Querschnitt durch die Raumzeit mit nur einer räumlichen Dimension und dazu die zeitliche Dimension, beide bezüglich eines gegebenen Bezugssystems $\mathcal{B}$. Konventionell wird die letztere vertikal (oder zumindest mit einem Winkel zur vertikalen kleiner als 45°) und nach oben gerichtet dargestellt. Dementsprechend ist die Weltlinie eines relativ zu $\mathcal{B}$ ruhenden Körpers eine vertikale Gerade, wie in Abb. I.2 (linke Weltlinie) gezeigt wird. Die Weltlinie

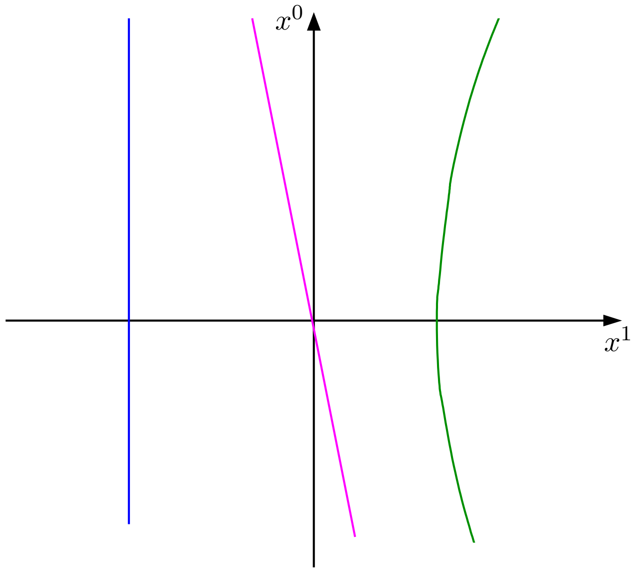

Abbildung I.2 – Beispiel eines Minkowski-Diagramms mit drei Weltlinien (links: ruhender Körper; Mitte: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit; rechts: beschleunigte Bewegung).

[(h)] H. Minkowski, 1864–1909

eines Körpers in gleichförmiger geradliniger Bewegung wird ebenfalls durch eine Gerade dargestellt; der Betrag der Steigung $\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}x^1$ dieser Geraden soll größer als 1 sein, denn $\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}x^1$ ist gleich c mal dem Rückwert der x^1-Komponente der Geschwindigkeit (v^1) des Körpers, und v^1 soll kleiner als c sein.

Schließlich ist die Weltlinie, die einer beliebig beschleunigten Bewegung entspricht, eine Kurve, die für jeden Wert von x^0 nur einen Wert von x^1 annimmt, und deren Steigung immer größer als 1 ist, wie z.B. die rechte Weltlinie in Abb. I.2.

I.2.3 b Metrischer Tensor

Bezeichnet man mit dx die Verschiebung zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen in $\mathscr{M}_4$, dann lässt sich das Linienelement (I.6) als

$$\mathrm{d}s^2 = -\big(\mathrm{d}x^0\big)^2 + \big(\mathrm{d}x^1\big)^2 + \big(\mathrm{d}x^2\big)^2 + \big(\mathrm{d}x^3\big)^2 \tag{I.18}$$

schreiben, wobei die $\mathrm{d}x^\mu$ mit $\mu = 0,1,2,3$ die Koordinaten von dx sind.

Für $\mu,\nu = 0,1,2,3$ definiert man Zahlen $\eta_{\mu\nu}$ durch

$$\begin{cases} \eta_{00} = -1 \\ \eta_{ii} = +1 \text{ für } i = 1,2,3 \\ \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{I.19}$$

Mithilfe dieser Zahlen lautet das Linienelement (I.18) noch

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu,} \tag{I.20}$$

wobei die einsteinsche Summenkonvention benutzt wurde: die Summe über doppelt auftretende Lorentz-Indizes, hier μ und ν, von 0 bis 3 wird nicht geschrieben.

In Matrixdarstellung wird $\eta_{\mu\nu}$ zum Element der $(\mu+1)$-ten Zeile und $(\nu+1)$-ten Spalte einer 4×4-Matrix:

$$\mathsf{\eta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I.21}$$

und das Linienelement wird zu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{dx}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{\eta}\,\mathrm{dx} \tag{I.22}$$

wobei dx^{T} den zu dx transponierten Zeilenvektor mit Elementen $\mathrm{d}x^\mu$ bezeichnet.

Die 16 Zahlen $\eta_{\mu\nu}$ sind die Komponenten des *metrischen Tensors* $\boldsymbol{\eta}$, auch *Minkowski-Metrik* genannt.[(4)] In welchem Sinn es sich dabei um einen Tensor handelt, wird hiernach in § I.3.3 weiter diskutiert.

Dass das Linienelement $\mathrm{d}s^2$ die gleiche Form (I.22) in allen Inertialsystemen annimmt, führt zu einer für Lorentz-Transformationen charakteristischen Beziehung, die den metrischen Tensor involviert. Unter der Koordinatentransformation $\mathrm{x} \to \mathrm{x}' = \Lambda\mathrm{x}$ transformiert sich die infinitesimale Verschiebung gemäß $\mathrm{dx} \to \mathrm{dx}' = \Lambda\,\mathrm{dx}$. Der Einsatz von dx' und $\mathrm{dx}'^{\mathsf{T}}$ in Beziehung (I.22) gibt

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{dx}'^{\mathsf{T}}\,\mathsf{\eta}\,\mathrm{dx}' = \mathrm{dx}^{\mathsf{T}}\,\Lambda^{\mathsf{T}}\mathsf{\eta}\,\Lambda\,\mathrm{dx}.$$

Die Anforderung $\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$ und Gl. (I.22) lauten dann $\mathrm{dx}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{\eta}\,\mathrm{dx} = \mathrm{dx}^{\mathsf{T}}\,\Lambda^{\mathsf{T}}\mathsf{\eta}\,\Lambda\,\mathrm{dx}$. Da diese Gleichung für alle Verschiebung dx gelten muss, ergibt sich schließlich die Matrixgleichung

$$\Lambda^{\mathsf{T}}\mathsf{\eta}\,\Lambda = \mathsf{\eta}, \tag{I.23}$$

die somit äquivalent zur Invarianz des Linienelements unter Lorentz-Transformationen ist.

(4) Mathematisch handelt es sich eher um eine Pseudo-Metrik, denn $\boldsymbol{\eta}$ ist nicht positiv definit.

Wie wir in § I.3.2 c sehen werden, dient der metrische Tensor $\boldsymbol{\eta}$ dazu, ein (pseudo-)skalares Produkt auf $\mathscr{M}_4$ zu definieren. Versehen mit diesem Produkt heißt die Raumzeit $\mathscr{M}_4$ noch *Minkowski-Raum*. Wiederum ist ein System von *Minkowski-Koordinaten* ein Koordinatensystem in $\mathscr{M}_4$, in welchem die Komponenten des metrischen Tensors die einfache Form (I.19) annehmen[(5)] — was im Folgenden immer der Fall sein wird.

Bemerkungen:

$*$ Die Definition[(6)] $\eta = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ des metrischen Tensors ist nicht universell: manche Autoren benutzen stattdessen die Konvention[(7)] $\eta = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$ und definieren dementsprechend $\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{r}^{\,2}$ als Linienelement.

$*$ Ein Merkmal des Minkowski-Raums $\mathscr{M}_4$ der Speziellen Relativitätstheorie ist die Existenz von *globalen* Minkowski-Koordinatensystemen, deren Koordinaten überall und zu jeder Zeit gelten — obwohl $\mathscr{M}_4$ mathematisch kein Vektorraum, sondern eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist.

$*$ In diesem Skript wurde der metrische Tensor nach den Lorentz-Transformationen eingeführt; jedoch die logische Herangehensweise, die oben nur implizit benutzt wurde, geht eher in die andere Richtung: der metrische Tensor wird zunächst postuliert, dann sind die Lorentz-Transformationen die zugehörigen *Isometrien*, d.h. die linearen Koordinatentransformationen, die das entsprechende (Pseudo-)Skalarprodukt invariant lassen. Dementsprechend kann die Matrixgleichung (I.23) eigentlich als die definierende Beziehung der Lorentz-Transformationen betrachtet werden.

$*$ Hier wurden für den metrischen Tensor und seine natürliche Matrixdarstellung unterschiedliche Notationen $\boldsymbol{\eta}$ bzw. η verwendet, um den Unterschied zwischen den beiden mathematischen Objekten zu betonen.

I.2.3 c Kausalitätsstruktur des Minkowski-Raums

Der metrische Tensor mit dem damit einhergehenden Begriff des Intervalls Δs^2 zwischen zwei Ereignissen induziert eine Kausalitätsstruktur im Minkowski-Raum. Somit kann Δs^2 entweder negativ, positiv oder Null sein, was physikalisch unterschiedlichen Möglichkeiten entspricht.

- Im Fall $\Delta s^2 < 0$ kann man immer ein Inertialsystem $\mathcal{B}$ derart finden, dass die Weltlinie seines Ursprungspunkts durch die zwei Ereignisse geht. Dementsprechend spricht man von einem *zeitartigen Intervall* zwischen den beiden Ereignissen.

  Beispielsweise ist das Intervall zwischen den in Abb. I.3 dargestellten Ereignissen P_0 und P_1 zeitartig. Dabei ist $x^0(P_1) > x^0(P_0)$, d.h. P_1 liegt in der Zukunft von P_0: was in P_0 passiert kann die Physik in P_1 beeinflussen, so dass die zwei Ereignisse miteinander kausal verknüpft sind.

- Für ein Intervall $\Delta s^2 > 0$, wie jenes zwischen den Ereignissen P_0 und P_3 der Abb. I.3, kann ein Inertialsystem, dessen Nullpunkt durch die beiden Ereignisse geht, nicht gefunden werden. Angenommen, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen ist, kann kein aus P_0 ausgesandte Signal P_3 erreichen, und umgekehrt: die zwei Ereignisse sind nicht miteinander kausal verknüpft.

  Eigentlich gibt es in diesem Fall Inertialsysteme, in denen wie in Abb. I.3 $x^0(P_0) > x^0(P_3)$, während in anderen Inertialsystemen $x^0(P_0) < x^0(P_3)$ gilt: keines der Ereignisse liegt auf absoluter Weise in der Zukunft des anderen. Da es sogar Inertialsysteme gibt, in denen die beiden Ereignisse gleichzeitig sind, $x^0(P_0) = x^0(P_3)$, spricht man im Fall $\Delta s^2 > 0$ von einem *raumartigen Intervall*.

(5) Das heißt, dass die zugehörigen Basisvektoren ein orthonormiertes System bilden.

(6) „Metrik mit positiver Signatur“, „mostly plus metric“, „East Coast metric“...

(7) „Metrik mit negativer Signatur“, „mostly minus metric“, „West Coast metric“...

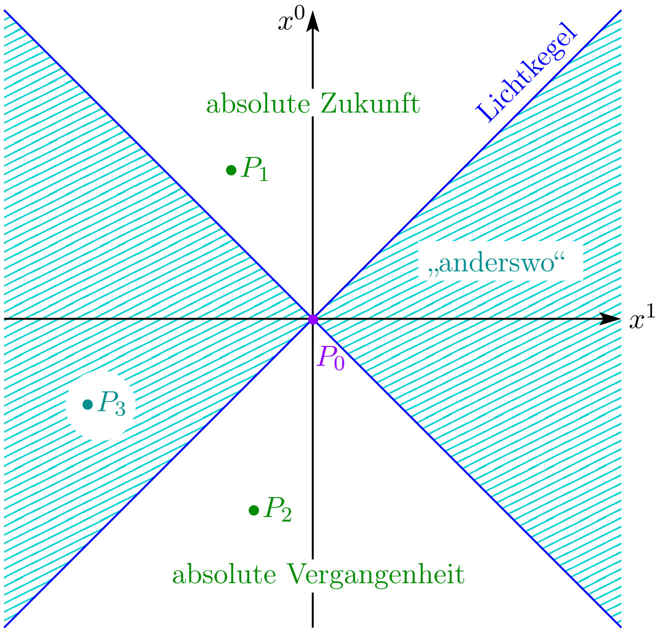

Abbildung I.3 – Kausalitätsstruktur der Raumzeit.

- Schließlich kann im Fall eines *lichtartigen Intervalls* $\Delta s^2 = 0$ zwischen zwei Ereignissen Licht von dem einen zum anderen propagieren, so dass die Ereignisse noch im kausalen Zusammenhang stehen.

Vom Standpunkt eines Ereignisses P_0 kann somit die Raumzeit in unterschiedlichen Bereichen zerlegt werden (vgl. Abb. I.3). Die Ereignisse, die in lichtartigem Abstand von P_0 sind, bilden den *Lichtkegel*.(8) Innerhalb des letzteren, d.h. in zeitartigem Abstand von P_0, befinden sich die Ereignisse, die im kausalen Zusammenhang mit P_0 sind, und zwar entweder in seiner *absoluten Zukunft* — wie P_1 in Abb. I.3 — oder in der *absoluten Vergangenheit*, wie P_2. Dagegen sind die Ereignisse außerhalb des Lichtkegels — d.h. in raumartigem Abstand von P_0, wie P_3 — kausal entkoppelt von P_0: sie liegen im *absoluten Anderswo*.

Da das Intervall Δs^2 den gleichen Wert in allen Inertialsystemen annimmt, ist die obige Kausalitätsstruktur die gleiche für alle inertiale Beobachter — wie es sein muss!

Bemerkung: Entsprechend der kausalen Struktur hängt die Physik in P_0 nur von den Ereignissen innerhalb dessen „vergangenen Lichtkegels“ ab: instantane Fernwirkung wird somit ausgeschlossen.

I.2.4 Kinematische Effekte

Aus der Form von speziellen Lorentz-Transformationen folgen mehrere kinematische Effekte.

I.2.4 a Zeitdilatation

Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Inertialsysteme, wobei sich $\mathcal{B}'$ relativ zu $\mathcal{B}$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt. Die zeitlichen und räumlichen Koordinaten $(t, \vec{r})$ und $(t', \vec{r}\,')$ von beiden Systemen (mit $\vec{r}\,' = \vec{r} = \vec{0}$ bei $t' = t = 0$) hängen über das Lorentz-Boost (I.13) zusammen.

Betrachte man zwei Ereignisse, z.B. zwei sukzessive Ticks einer Uhr, die im Ursprungspunkt $\vec{r} = \vec{0}$ von $\mathcal{B}$ zu Zeiten t_1 und $t_2 = t_1 + \Delta t$ stattfinden. Vom Standpunkt von $\mathcal{B}'$ finden diese Ereignisse in unterschiedlichen Raumpunkten — die Uhr bewegt sich relativ zu $\mathcal{B}'$ — zu den Zeitpunkten

(8) Um den Kegel zu erkennen, muss sich die Leserin erstens eine Raumzeit mit einer zeitlichen Richtung — die der Achse des Kegels entspricht — und zwei räumlichen Richtungen vorstellen; dann kann sie die dritte Raumdimension hinzufügen.

$t'_1 = \gamma t_1$ und $t'_2 = \gamma t_2 = \gamma(t_1 + \Delta t) = t'_2 + \gamma\Delta t$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ dem Lorentz-Faktor statt. Somit ist das in $\mathcal{B}'$ gemessene Zeitintervall zwischen den Ereignissen

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \tag{I.24}$$

wegen $\gamma > 1$ größer als das in $\mathcal{B}$ gemessene Zeitintervall Δt: die bewegte Uhr geht langsamer als die ruhende, entsprechend *Zeitdilatation*.

Eigenzeit

Betrachte man einen bewegten Massenpunkt. Zu jeder Zeit kann man ein Inertialsystem $\mathcal{B}_0$ finden, das momentan mit dem (nicht unbedingt) Ruhesystem des Massenpunktes übereinstimmt. Das heißt, dass der Massenpunkt relativ zu $\mathcal{B}_0$ momentan ruht. Sei τ die Zeitkoordinate von $\mathcal{B}_0$; τ heißt *Eigenzeit* des Massenpunktes.

Sei t die Zeit in einem Inertialsystem $\mathcal{B}$, relativ zu dem der Massenpunkt (oder äquivalent das Inertialsystem $\mathcal{B}_0$) sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Laut Gl. (I.24) hängt das Eigenzeitelement $\mathrm{d}\tau$ mit dem infinitesimalen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ in $\mathcal{B}$ über $\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau$ oder äquivalent

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\,\mathrm{d}t \tag{I.25}$$

zusammen.

Bemerkung: Das Linienelement entlang der Weltlinie des Massenpunktes lässt sich auch als

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2 \tag{I.26}$$

schreiben, was als Definition von der Eigenzeit angesehen werden kann.

I.2.4 b Gleichzeitigkeit

Seien P_1, P_2 Ereignisse, die bezüglich eines Inertialsystems $\mathcal{B}$ gleichzeitig sind: $x^0(P_1) = x^0(P_2)$. Anhand eines Minkowski-Diagramms (Abb. I.4) oder mithilfe der Form des Lorentz-Boosts zwischen Koordinatensystems zeigt man einfach, dass sie in einem anderen Inertialsystem $\mathcal{B}'$, das sich relativ zu $\mathcal{B}$ bewegt, im Allgemeinen nicht gleichzeitig sind: $x^{0'}(P_1) \neq x^{0'}(P_2)$.

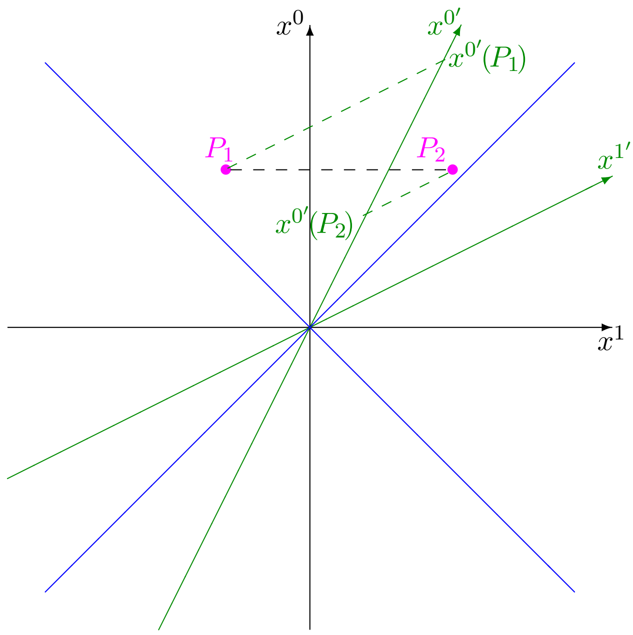

Abbildung I.4

Somit ist Gleichzeitigkeit kein absoluter Begriff, sondern gilt nur relativ zu einem bestimmten Bezugssystem.

Eine Folgerung dieses Ergebnisses bezieht sich auf einen Satz von Uhren, die in einem gegebenen Inertialsystem $\mathcal{B}$ zur Zeit $t = 0$ alle die gleiche Zeit anzeigen, obwohl sie sich in unterschiedlichen Orten gefunden: d.h. *synchronisierte Uhren*.

In einem anderen Inertialsystem $\mathcal{B}'$, das sich relativ zu $\mathcal{B}$ bewegt, werden diese Uhren im Allgemeinen nicht mehr synchron sein.

I.2.4 c Längenkontraktion

→ **Aufgabe 5**

I.2.4 d Additionstheorem für Geschwindigkeiten

→ **Aufgabe 1**