I.2.2 Lorentz-Transformationen

In der Transformation $(t,\vec{r}) \to (t',\vec{r}\,')$ zwischen den Zeit- und Ortskoordinaten zweier Inertialsysteme muss das oben definierte Linienelement $\mathrm{d}s^2$ invariant bleiben.

Definition: Die linearen Transformationen der zeitlichen und räumlichen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \tag{I.7}$$

die das Linienelement $\mathrm{d}s^2 \equiv -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{r}\,^2$ invariant lassen, wobei Λ eine konstante 4×4-Matrix ist, heißen *Lorentz-Transformationen*.

Bemerkungen:

∗ Dass die Transformationsmatrix Λ konstant, d.h. insbesondere ortsunabhängig, ist, folgt aus der postulierten Homogenität des Raums.

∗ In der obigen Definition kann man die Linearität der Transformationen weglassen und durch eine schwächere Annahme über die Transformation ersetzen (vgl. den noch nicht-existierenden Anhang zu diesem Kapitel).
Andererseits existieren noch weitere lineare Koordinatentransformationen, die das Linienelement invariant lassen, vgl. Bemerkung in § I.3.2.

Wegen der Linearität nimmt die Transformation der zeitlichen und räumlichen Intervallen zwischen zwei Raumzeit-Punkten die gleiche Form

$$\begin{pmatrix} c\,\Delta t' \\ \Delta\vec{r}\,' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,\Delta t \\ \Delta\vec{r} \end{pmatrix}$$

an. Eine ähnliche Beziehung gilt noch, wenn die Intervalle zwischen den zwei Raumzeit-Punkten infinitesimal klein sind. Hiernach wird mit solchen infinitesimalen Intervallen bzw. Linienelementen gearbeitet.

Es gibt zwei Haupttypen solcher Transformationen, und zwar einerseits Drehungen (§ I.2.2 a) — unter welchen das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ sich nicht ändert — und Lorentz-Boosts (§ I.2.2 b).

I.2.2 a Drehungen

Die Transformationen $(t,\vec{r}) \to (t',\vec{r}\,')$, in denen einerseits die Raumkoordinaten gedreht werden, während andererseits die Zeitkoordinate unverändert bleibt, bilden eine erste Klasse von Lorentz-Transformationen, die den Drehungen im dreidimensionalen Ortsraum der nicht-relativistischen Mechanik entsprechen. Solche Transformationen gelten für zwei Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander nicht bewegen, deren Achsen aber nicht parallel sind.

Die assoziierte Transformationsmatrix lautet

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathscr{R} \end{pmatrix} \tag{I.8}$$

wobei $\mathscr{R}$ eine 3×3-Drehmatrix bezeichnet. Diese erfüllt die charakteristische Eigenschaft $\mathscr{R}^{\mathsf{T}}\mathscr{R} = \mathbb{1}_3$, wobei $\mathbb{1}_3$ die dreidimensionale Identitätsmatrix ist, mit der zusätzlichen Bedingung $\det\mathscr{R} = 1$. In der Tat führt

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}\vec{r}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathscr{R}\,\mathrm{d}\vec{r} \end{pmatrix} \tag{I.9}$$

unter Berücksichtigung der Eigenschaft $\mathscr{R}^{\mathsf{T}}\mathscr{R} = \mathbb{1}_3$ sofort zu

$$\mathrm{d}s'^2 \equiv -c^2\,\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}\vec{r}\,'^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{r}^{\,\mathsf{T}}\mathscr{R}^{\mathsf{T}}\mathscr{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{r}\,^2 = \mathrm{d}s^2,$$

d.h. zur gewünschten Invarianz des Linienelements.

I.2.2 b Lorentz-Boosts

Sei jetzt angenommen, dass sich $\mathcal{B}'$ relativ zu $\mathcal{B}$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt. In beiden Inertialsystemen werden orthonormierte Koordinatensysteme benutzt, wobei die Achsen des Koordinatensystems von $\mathcal{B}'$ parallel zu den Achsen von $\mathcal{B}$ sind. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die $x = x'$-Richtung der Koordinaten entlang der Bewegungsrichtung liegt, d.h. $\vec{u} = u\,\vec{e}_x$. Dazu wird noch angenommen, dass die Ursprungspunkte beider Koordinatensysteme zur Zeitpunkt $t = t' = 0$ übereinstimmen, so dass die Beziehung (I.7) dann erfüllt wird.

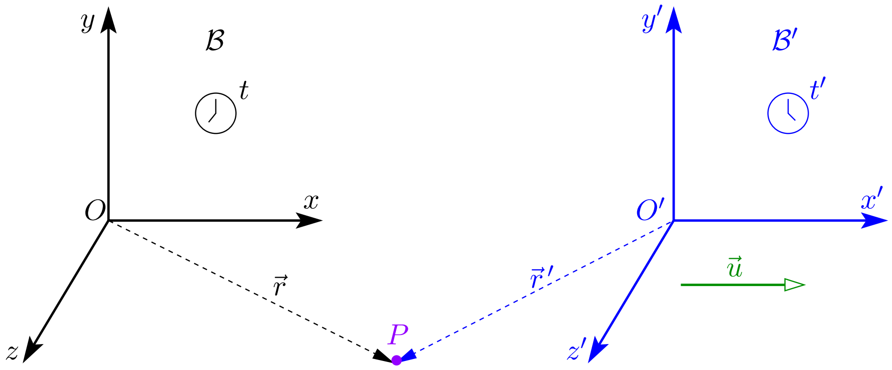

Abbildung I.1

Da nichts in den Richtungen $y = y'$ und $z = z'$ senkrecht zur Bewegung passiert, bleiben die Koordinaten eines Punkts entlang dieser Achsen unverändert in der Transformation von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$. Demzufolge gelten $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z$ für das Intervall zwischen benachbarten Punkten. Diese senkrechten Richtungen sollen sich auch nicht mit den anderen Koordinaten mischen, d.h. $\mathrm{d}t'$, $\mathrm{d}x'$ sind unabhängig von $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$.

Daher ist die Transformation der Art

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ D & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

mit A, B, D, E drei reellen Zahlen. Dann lautet das Linienelement in $\mathcal{B}'$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s'^2 &= -(A c\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}x)^2 + (D c\,\mathrm{d}t + E\,\mathrm{d}x)^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= -(A^2 - D^2)c^2\,\mathrm{d}t^2 + (E^2 - B^2)\,\mathrm{d}x^2 + 2(DE - AB)c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \end{aligned}$$

was gleich $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ sein muss. Beliebige $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}\vec{r}$ genügen dieser Gleichung nur genau dann, wenn das System

$$\begin{cases} A^2 - D^2 = 1 \\ E^2 - B^2 = 1 \\ DE - AB = 0 \end{cases}$$

erfüllt wird.

Seien $A \equiv \gamma$ und $B \equiv -\beta\gamma$. Dann stellen sie mit $D = B = -\beta\gamma$ und $E = A = \gamma$ eine Lösung des Systems dar, wenn $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ist. Dazu soll $\beta = |\vec{u}|/c$ sein, um den richtigen nicht-relativistischen Limes $u = |\vec{u}| \ll c$ wiederzufinden (s. unten). Schließlich lautet die Matrix für ein *Lorentz-Boost*, auch *spezielle Lorentz-Transformation* genannt,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I.10a}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta \equiv \frac{u}{c}. \tag{I.10b}$$

γ heißt *Lorentz-Faktor* des Boosts.

Im *nicht-relativistischen Limes* $u \ll c$, d.h. $\beta \ll 1$, gibt eine Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta\ll 1}{\sim} 1 + \frac{\beta^2}{2} + \mathcal{O}(\beta^4), \tag{I.11}$$

so dass $\beta\gamma \sim \beta + \mathcal{O}(\beta^3)$ ist. Aus Gl. (I.7) und der Form (I.10a) des Lorentz-Boosts folgen dann

$$c\,\mathrm{d}t' = c\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\beta) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x' = -\beta c\,\mathrm{d}t' + \mathrm{d}x + \mathcal{O}(\beta^2).$$

Die erste Gleichung gibt $t' = t + \text{Konstante}$, während die zweite mit $\beta = u/c$ zu $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}t$ oder äquivalent $x' = x - ut$ führt, entsprechend dem bekannten nicht-relativistischen Ergebnis für ein Galilei-Boost entlang der x-Achse.

Bemerkungen:

∗ *Rapidität* des Lorentz-Boosts... mehr später!

$$\xi_u \equiv \operatorname{artanh}\frac{u}{c} = \frac{1}{2}\ln\frac{c+u}{c-u}. \tag{I.12}$$

∗ Lorentz-Boost entlang einer beliebigen Richtung... später!

I.2.2 c Lorentz-Gruppe

Allgemeiner bilden die linearen Transformationen $(ct, \vec{r}) \to (ct', \vec{r}\,')$, die das Linienelement $\mathrm{d}s^2$ [Gl. (I.6)] invariant lassen, eine Gruppe, die *Lorentz-Gruppe*.

Wie wir unten (§ I.2.4 b) sehen werden, lassen sich diese Transformationen noch äquivalent dadurch charakterisieren, dass ihre Matrixdarstellung $\mathsf{\Lambda}$ die Gleichung

$$\eta = \Lambda^{\mathsf{T}}\eta\Lambda \tag{I.13}$$

erfüllen, wobei η in Gl. (I.21) definiert ist. Dass die Menge solcher Matrizen versehen mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden, ist dann schnell bewiesen:

- Wenn Λ_1, Λ_2 die Gl. (I.13) erfüllen, dann gilt das noch für ihr Produkt $\Lambda_1\Lambda_2$. Dazu ist das Produkt von Matrizen assoziativ: $\Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) = (\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3$.
- Die 4×4-Einheitsmatrix $\mathbb{1}_4$ — entsprechend der Identitätstransformation der Koordinaten — genügt die Beziehung (I.13), d.h. es gibt ein neutrales Element.
- Aus Gl. (I.13) folgt $|\det\Lambda| = 1$, d.h. Λ ist invertierbar; die inverse Matrix Λ^{-1} erfüllt trivial die definierende Beziehung.

Die Lorentz-Gruppe wird oft mit O(1,3) bezeichnet.

Sowohl die Drehungen des § I.2.2 a als die Lorentz-Boosts des § I.2.2 b, die je eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe bilden, sind sog. *eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen*, Elemente der *eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe* $\mathrm{SO}^+(1,3)$.(3) Bei den *eigentlichen Lorentz-Transformationen* handelt es sich um solche mit Determinante +1; diese bilden die *eigentliche Lorentz-Gruppe*, die mit SO(1,3) bezeichnet wird.

Wiederum sind die *orthochronen Lorentz-Transformationen* diejenigen, welche die Richtung der Zeitkomponente nicht ändern. Das heißt, das Matrixelement oben links in der Matrixdarstellung Λ — das in Abschn. I.3 mit ${\Lambda^{0'}}_0$ bezeichnet wird — muss positiv, und in der Tat größer gleich 1, sein. Diese Transformationen bilden die *orthochrone Lorentz-Gruppe* $\mathrm{O}^+(1,3)$.(3)

(3) Statt $\mathrm{O}^+(1,3)$ bzw. $\mathrm{SO}^+(1,3)$ wird auch die Notation $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ bzw. $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ benutzt.

Beispiele von uneigentlichen ($\det\Lambda = -1$) Lorentz-Transformationen sind einerseits die *Raumspiegelung* $(ct, \vec{r}) \to (ct' = ct, \vec{r}\,' = -\vec{r})$ mit der Matrixdarstellung

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

und andererseits die *Zeitumkehr* $(ct, \vec{r}) \to (ct' = -ct, \vec{r}\,' = \vec{r})$ mit Matrixdarstellung

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{I.15}$$

die offensichtlich auch nicht orthochron ist. Dann ist die (kommutierende) Verknüpfung beider Transformationen, mit Matrixdarstellung $\Lambda_P\Lambda_T = -\mathbb{1}_4$, eine nicht-orthochrone eigentliche Lorentz-Transformation.

Mathematisch stellen die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ und die drei Mengen $\mathrm{SO}^-(1,3) \equiv \{\Lambda_P\Lambda_T\Lambda,\ \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)\}$, $\{\Lambda_P\Lambda,\ \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)\}$ und $\{\Lambda_T\Lambda,\ \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)\}$ die vier Zusammenhangskomponenten der Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(1,3)$ dar, entsprechend jeweils den vier Möglichkeiten $++$, $+-$, $+-$, $-+$ für die Vorzeichen der Determinante $\det\Lambda$ und des Matrixelements $\Lambda^{0'}{}_0$.