Kapitel I

Postulate und mathematischer Apparat der Speziellen Relativitätstheorie

Einleitung... fehlt!

I.1 Einsteinsche Postulate

I.1.1 Motivation

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts verfügten Physiker über zwei Theorien — Klassische Mechanik und Elektrodynamik —, die zwar separat sehr erfolgreich waren, sich aber nicht problemlos miteinander im Einklang bringen ließen.

- In der Klassischen Mechanik, wie sie zuerst durch Newton[(a)] entwickelt wurde, wird der Begriff des *Inertialsystems* eingeführt: laut dem Galilei[(b)]-Trägheitsprinzip bleibt der Bewegungszustand — Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung — eines Körpers relativ zu einem Inertialsystem unverändert, solange der Körper keiner Kraft unterliegt. Dann ist jedes Bezugssystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem gleichförmig und geradlinig bewegt, ebenfalls inertial; dagegen sind Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem beschleunigt bewegen, nicht-inertial. Somit sind die Koordinatentransformationen zwischen den zeitlichen und (kartesischen) räumlichen Koordinaten zweier Inertialsysteme die *Galilei-Transformationen*:

  * räumliche Translationen $t \to t' = t,\ \vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{c}$ mit $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ (I.1a)
  * zeitliche Translationen $t \to t' = t - \tau,\ \vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ (I.1b)
  * Drehungen $t \to t' = t,\ \vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathscr{R}\vec{r}$ mit einer Drehmatrix $\mathscr{R}$ (I.1c)
  * Galilei-Boosts $t \to t' = t,\ \vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}\,t$ mit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ (I.1d)

  sowie deren Produkte, die zusammen die *Galilei-Gruppe* bilden.

  Man prüft einfach nach, dass die Gesetze der klassischen Mechanik — insbesondere das zweite newtonsche Gesetz — in jedem Inertialsystem die gleiche Form annehmen. Entsprechend diesem sog. *Galileischen Relativitätsprinzip*[(1)] sind alle Inertialsysteme gleichwertig.

  Schließlich folgt aus Gl. (I.1d) das klassische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten: bewegt sich ein Körper mit Geschwindigkeit $\vec{v}\,'$ relativ zu einem Inertialsystem $\mathcal{B}'$, das sich selbst relativ zu einem anderen Inertialsystem $\mathcal{B}$ mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt, so ist die Geschwindigkeit des Körpers bezüglich $\mathcal{B}$ durch

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} \tag{I.2}$$

[(1)]... das eigentlich durch Newton formuliert wurde!

[(a)] I. Newton, 1643–1727 [(b)] G. Galilei, 1564–1642 gegeben.

- Die ganze Elektrodynamik, zumindest im Vakuum, ist in den Maxwell[c]-Gleichungen enthalten. Aus denen folgert man leicht, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum von elektromagnetischen Wellen — insbesondere von Licht, das laut Arbeiten von Hertz[d] ein elektromagnetisches Phänomen ist — denselben Wert (c) in allen Inertialsystemen annimmt. In der Tat zeigten die Interferenz-Experimente von Michelson[e] und Morley[f], dass die Lichtgeschwindigkeit parallel oder senkrecht zur (instantanen) Bewegungsrichtung der Erde um die Sonne gleich bleibt.

  Diese theoretische Vorhersage sowie ihre experimentelle Bestätigung[2] lassen sich aber offensichtlich nicht mit dem Additionsgesetz für Geschwindigkeiten (I.2) in Einklang bringen.

I.1.2 Einsteinsche Postulate

Um die theoretisch und experimentell gefundene Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit zu berücksichtigen hat Einstein[g] (1905) zwei Postulate eingeführt [1], die zu einer neuen Kinematik führen und somit im Endeffekt die durch Newton postulierten Gesetze ungültig machen.

I.1.2 a Erstes Postulat

Das erste dieser Postulate ist das einsteinsche *Relativitätsprinzip*:

Die Gesetze der Physik nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an. (I.3)

Dabei handelt es sich um eine Erweiterung des oben erwähnten Galilei-Relativitätsprinzips, das aber nur für mechanische System galt. Mit seiner Verallgemeinerung meinte insbesondere Einstein, dass auch elektromagnetische Phänomene diesem Prinzip genügen sollen.

Bemerkung: Eine alternative Formulierung des Postulats besagt, dass kein physikalisches Experiment es erlaubt, zwischen Zustand der Ruhe und gleichförmiger geradliniger Bewegung zu unterscheiden.

I.1.2 b Zweites Postulat

Mit seinem zweiten Postulat entschied sich Einstein gegen die newtonschen Gesetze mit deren Invarianz unter Galilei-Transformationen, und legte mehr Wert auf die Maxwell-Gleichungen und deren experimentellen Bestätigungen, indem er die Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit als grundsätzlich erklärte:

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich. (I.4)

Demzufolge kann das klassische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten nicht mehr gelten. Dies bedeutet wiederum, dass Galilei-Transformationen, insbesondere Galilei-Boosts, nicht die richtigen Transformationen zwischen Inertialsystemen sind. Wegen dieses Prinzips muss also die ganze Kinematik neu geschrieben werden.

---

[2]... vorausgesetzt, die Michelson–Morley-Experimente wirklich das Fortpflanzen von Licht im Vakuum messen, nicht in irgendeinem hypothetischen Medium — dem Äther —, wie damals vorgeschlagen wurde, um die Newton-Mechanik zu retten.

---

[c]J. C. Maxwell, 1831–1879 [d]H. Hertz, 1857–1894 [e]A. Michelson, 1852–1931 [f]E. Morley, 1838–1923 [g]A. Einstein, 1879–1955

I.2 Lorentz-Transformationen

In diesem Abschnitt sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Inertialsysteme, während t und $\vec{r}$ bzw. t' und $\vec{r}\,'$ die Zeit und den Ortsvektor bezeichnen, die durch einen in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ ruhenden Beobachter gemessen sind.

I.2.1 Raumzeit-Intervall, Linienelement

Seien P_1 und P_2 zwei Punkte, zwischen denen Vakuum herrscht. Zu einem ersten Zeitpunkt wird Licht in P_1 emittiert. Für den Beobachter in $\mathcal{B}$ geschieht dies zur Zeit t_1 bei der Position $\vec{r}_1$; für den Beobachter in $\mathcal{B}'$, zur Zeit t'_1 bei der Position $\vec{r}\,'_1$. Das Licht wird zu einem späteren Zeitpunkt in P_2 detektiert, und zwar für den Beobachter in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ zur Zeit t_2 bzw. t'_2 bei der Position $\vec{r}_2$ bzw. $\vec{r}\,'_2$.

Laut dem zweiten einsteinschen Postulat muss die Vakuumlichtgeschwindigkeit gleich c für beide Beobachter sein, d.h.

$$\frac{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}{t_2-t_1} \equiv \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = c \quad \text{und} \quad \frac{|\vec{r}\,'_2-\vec{r}\,'_1|}{t'_2-t'_1} \equiv \frac{|\Delta\vec{r}\,'|}{\Delta t'} = c$$

oder äquivalent $|\Delta\vec{r}| = c\Delta t$ und $|\Delta\vec{r}\,'| = c\Delta t'$, oder noch

$$(\Delta\vec{r})^2 = c^2\Delta t^2 \quad \text{und} \quad (\Delta\vec{r}\,')^2 = c^2\Delta t'^2.$$

Die Differenz

$$\boxed{\Delta s^2 \equiv -c^2\Delta t^2 + (\Delta\vec{r})^2} \tag{I.5}$$

wird *Intervall* oder *Abstand* in der Raum-Zeit genannt. Gemäß der obigen Diskussion muss dieses Intervall dasselbe — und zwar gleich Null — für beide Beobachter sein

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 = 0,$$

damit beide Inertialbeobachter dieselbe Lichtgeschwindigkeit im Vakuum messen.

Betrachtet man nun infinitesimal benachbarte Punkte P_1 und P_2, und dementsprechend ein infinitesimales Zeitintervall für die Lichtpropagation, so kann man die Änderungen $\Delta\vec{r}$, Δt, usw. durch infinitesimale Variationen $\mathrm{d}\vec{r}$, $\mathrm{d}t$, usw. ersetzen. Dann wird das Intervall (I.5) zum *Linienelement*

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \equiv -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{r}^{\,2}.} \tag{I.6}$$

Seien jetzt P_1, P_2 zwei beliebige Punkte derart, dass in beiden Orten zu gegebenen Zeitpunkten etwas passiert. Für den Beobachter in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ findet das „erste" Ereignis zur Zeit t_1 bzw. t'_1 statt, als sich der Punkt P_1 bei der Position $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}\,'_1$ befindet. Wiederum sind die jeweiligen Zeit- und Ortskoordinaten des „zweiten" Ereignisses $t_2 \equiv t_1 + \Delta t$ und $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$ bzw. $t'_2 \equiv t'_1 + \Delta t'$ und $\vec{r}\,'_2 \equiv \vec{r}\,'_1 + \Delta\vec{r}\,'$. Dabei wird nichts über die Vorzeichen von Δt und $\Delta t'$ angenommen.

Das Intervall Δs^2 bzw. $\Delta s'^2$ zwischen den beiden Ereignissen für den Beobachter in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ kann wieder über Gl. (I.5) definiert werden. Wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ beide Inertialsysteme sind, müssen Δs^2 und $\Delta s'^2$ immer gleich sein, und zwar nicht nur wenn das Raumzeit-Intervall Null ist.