Übung Nr. 4

Diskussionsthemen:

- Großkanonisches Ensemble.
- Zustandssummen.

11. Harmonische Oszillatoren im kanonischen Gleichgewicht

i. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_1(\beta)$ für einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Kreisfrequenz ω, wobei man $\varepsilon = \hbar\omega$ definiert. Was ändert sich im Fall eines zwei- bzw. dreidimensionalen isotropen Oszillators?

ii. Geben Sie die Zustandssumme $Z_N(\beta)$ für ein System aus N unabhängigen, unterscheidbaren eindimensionalen Oszillatoren mit derselben Frequenz an.

iii. Drücken Sie die statistische Entropie S für N Oszillatoren durch die mittlere Energie $\langle E\rangle$ aus. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat der Aufgabe **9.i.** Kommentieren Sie.

iv. Einstein-Modell
Sei jetzt ein System aus N dreidimensionalen isotropen Oszillatoren. Diese stellen ein Modell[1] für die N Atome eines Festkörpers dar, die um ihre jeweilige Gleichgewichtsstelle oszillieren können. Dabei wird angenommen, dass die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist. Zudem hängt die Frequenz der Oszillatoren von den mechanischen Eigenschaften des Festkörpers ab. Berechnen Sie die Größe

$$C(\beta) \equiv -k_B\beta^2\,\frac{\partial(\langle E\rangle/N)}{\partial\beta}. \tag{1}$$

Drücken Sie $C(\beta)$ durch die Variable $x \equiv \beta\hbar\omega$ und die Zahl n der Molen von Atomen im Festkörper aus und skizzieren Sie $C(x)/n$ für $0 \le x \le 1$.

Hinweis: Die universelle Gaskonstante ist $R = N_A k_B$ mit N_A der Avogadro-Konstante.

12. Zweiniveausystem im kanonischen Gleichgewicht

Sei ein System aus N nicht-wechselwirkenden, unterscheidbaren Teilchen, die sich in zwei Zuständen mit Energien $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ befinden können.

i. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_N(\beta)$. Wie groß ist bei gegebenem β die mittlere Teilchenzahl im oberen Niveau? Welche Werte nimmt β an, wenn diese mittlere Teilchenzahl größer als $N/2$ ist?

ii. Sei $C(\beta)$ definiert durch Gl. (1). Skizzieren Sie $C(\beta)$ in Abhängigkeit von $1/\beta$. Interpretieren Sie das Resultat, indem Sie annehmen, dass $C(\beta)$ die Wärmekapazität des Systems ist.

13. Invarianz unter Galilei-Transformationen

Sei ein System im thermodynamischen Gleichgewicht in Abwesenheit von äußeren Feldern. Zeigen Sie, dass die statistische Entropie des Systems dieselbe bleibt, ob es sich in Ruhe oder in gleichförmiger Translation mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ befindet. Drücken Sie dazu den Lagrange-Multiplikator, der dem Impuls zugeordnet ist, durch die Translationsgeschwindigkeit aus, und vergleichen Sie die thermodynamischen Größen in den beiden Fällen.

[1] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) **22** (1907) 180–190 & 800.