Übung Nr. 3

Diskussionsthemen:
- Welches Prinzip liegt der Wahl des Dichteoperators entsprechend einem bestimmten makroskopischen physikalischen Zustand zugrunde? Wie werden mögliche Bedingungen berücksichtigt?
- Mikrokanonisches und kanonisches Ensemble.
- (Wiederholung Quantenmechanik) Der quantenmechanische harmonische Oszillator...

8. Unteradditivität der statistischen Entropie
Seien zwei Teilchen a und b mit dem Spin $\frac{1}{2}$.

i. Wiederholung Quantenmechanik Geben sie die möglichen Spinzustände für das System $a+b$ mit den entsprechenden Eigenzuständen an.

ii. Statistische Entropie eines verschränkten Zustands Sei jetzt angenommen, dass beide Teilchen a und b mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in jedem Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ sein können, und dass sie immer zum Singulett-Zustand koppeln.

a) Geben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}_{a+b}$ für das System $a+b$ an, sowie den Wert der entsprechenden statistischen Entropie $S(\hat{\rho}_{a+b})$.

b) Bestimmen Sie die Dichtematrizen $\hat{\rho}_a$, $\hat{\rho}_b$ für die individuellen Teilchen. Berechnen Sie die statistischen Entropie $S(\hat{\rho}_a)$, $S(\hat{\rho}_b)$.

c) Vergleichen Sie $S(\hat{\rho}_{a+b})$ mit $S(\hat{\rho}_a) + S(\hat{\rho}_b)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

9. Entropie eines Systems von harmonischen Oszillatoren
Sei ein System bestehend aus N unterscheidbaren gleichartigen harmonischen Oszillatoren mit quantisierten Energieniveaus $\left(m_i+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$ mit m_i einer ganzen Zahl. Die Gesamtenergie dieses Systems ist $E = \left(M+\frac{N}{2}\right)\varepsilon$ mit $M \in \mathbb{N}$. Es wird angenommen, dass alle möglichen Mikrozustände mit dieser Gesamtenergie, charakterisiert durch ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_N$ mit $m_1 + \cdots + m_N = M$, gleich wahrscheinlich sind.

i. Geben Sie die statistische Entropie des Systems an.

Hinweis: Überzeugen Sie sich, indem Sie $(m_1+1) + \cdots + (m_N+1) = M+N$ schreiben, dass die Anzahl von N-Tuplen $m_1, \ldots, m_N$ genügend der Bedingung gleich der Anzahl der Möglichkeiten ist, $N-1$ Elementen aus einer Menge mit $M+N-1$ Elementen auszuwählen.

ii. Folgern Sie daraus die mittlere statistische Entropie pro Oszillator S/N in Abhängigkeit von M/N im Limes $N \to \infty$. Drücken Sie S/N im selben Limes durch E/ε aus.

Hinweis: Stirling-Formel!

iii. Drücken Sie die Gesamtenergie durch ε und die Größe $\beta \equiv \partial S/\partial E$ aus.

10. Gefälschter Würfel
In Beobachtungen eines nicht isotropen sechsseitigen Würfels wurde die Augenzahl 6 zweimal öfter als die 1 gewürfelt. Über das Auftreten der anderen Augenzahlen weiß man nichts. Wenden Sie das Prinzip der maximalen Entropie an, um jeder Augenzahl eine Auftretenswahrscheinlichkeit p_m mit $1 \le m \le 6$ zuzuordnen.