Übung Nr. 2

Diskussionsthema: Warum werden Wahrscheinlichkeiten benutzt, um makroskopische Systeme zu beschreiben? Warum liefert eine solche Beschreibung fast sichere Ergebnisse?

4. Maxwell-Verteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome eines klassischen idealen Gases bei der Temperatur T ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{\vec{v}}(\vec{v}) = C \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right)$$

gegeben, mit m der Masse der Atome und C einer Normierungskonstante.

i. Berechnen Sie die Normierungskonstante.

ii. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle v_x^2 \rangle$ und $\langle \vec{v}^2 \rangle$.

iii. Wie groß ist die mittlere kinetische Energie eines Atoms?

iv. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_E(E)\,\mathrm{d}E$, dass die kinetische Energie eines Atoms im Intervall $[E, E+\mathrm{d}E]$ sei.

5. Dichteoperator

Sei auf einem zweidimensionalen Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis $\{\,|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ der Operator

$$\hat{\rho} = \alpha\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}\,|x\rangle\langle x| \qquad \text{mit } |x\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}.$$

i. Bestimmen Sie α so, dass $\hat{\rho}$ ein Dichteoperator ist.

ii. Was ist die Matrixdarstellung des Dichteoperators in der Basis $\{\,|x\rangle, |y\rangle\}$ mit $|y\rangle = \dfrac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$?

iii. Das System durchläuft eine Apparatur (z.B. eine Stern–Gerlach-Apparatur), welche nur die Zustände $|\uparrow\rangle$ durchlässt. Wie sieht der Dichteoperator des Systems nach Verlassen der Apparatur aus?

6. Entropie

Sei 1 mg Wasser unter normalen Bedingungen. Es wird angenommen, dass alle Mikrozustände entsprechend diesem Makrozustand gleich wahrscheinlich sind. Schätzen Sie die Anzahl von möglichen Mikrozuständen. Die molare Entropie von Wasser ist 70 $\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.

7. Wiederholung Quantenmechanik

Sei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator mit diskretem Spektrum.

i. Formulieren Sie die Eigenwertgleichung für $\hat{A}$. Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte, welche die Eigenvektoren? Beweisen Sie diese Eigenschaften.

ii. Wie lautet die Spektraldarstellung von $\hat{A}$?

iii. Sei $f(\hat{A})$ eine Funktion des Operators $\hat{A}$. Wie lauten die Eigenwerte, wie die Eigenvektoren und wie die Spektraldarstellung?

iv. Sei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Zustandsvektor des Hilbert-Raums. Wie lautet der Erwartungswert von $\hat{A}$ bezüglich $|\psi\rangle$? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten misst man die Eigenwerte von $\hat{A}$, wenn das System vor der Messung im Zustand $|\psi\rangle$ präpariert ist? Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten sich insgesamt zu 1 addieren.