

Übung Nr. 13

Diskussionsthema: Was sind die Fermi-Energie und die Fermi-Temperatur? Wann kann man ein ideales Fermi-Gas als ein Gas bei Temperatur Null beschreiben?

39. Neutronenstern

Nach dem Verbrauch seines nuklearen „Brennstoffs“ kollabiert ein Stern mit einer Masse von etwa $10 M_{\odot}$ zu einem *Neutronenstern*, wobei $1 M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg die Masse der Sonne bezeichnet. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass ein solcher Neutronenstern ausschließlich aus entarteten Neutronen besteht, deren Dichte im ganzen Stern konstant ist. Sei \mathcal{N}_n die Zahl von Neutronen im Stern und \mathcal{V} das Sternvolumen.

i. Die Teilchendichte in einem Neutronenstern ist vergleichbar mit jener im Zentrum eines großen Kerns ($n_{\infty} = 0,17 \text{ fm}^{-3}$) und die typische Temperatur ist $T \approx 10^8$ K. Zeigen Sie, dass der Neutronenstern als ein Fermi-Gas von nicht-relativistischen Neutronen bei Temperatur Null beschrieben werden kann. Geben Sie die entsprechende Fermi-Energie ε_F an.

Hinweis: Die Masse eines Neutrons ist $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

ii. Berechnen Sie den Druck und vergleichen Sie mit dem Druck eines klassischen idealen Gases bei der gleichen Temperatur.

iii. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E(R)$ des Neutronensterns in Abhängigkeit seines Radius R . Diese besteht aus zwei Beiträgen, und zwar aus der inneren Energie $U(R)$ und der Gravitationsenergie $E_G(R)$.

Hinweis: Zur Berechnung der letzteren kann man die Arbeit der Gravitationskräfte betrachten, die geleistet werden muss, um eine Kugelschale der Dicke dr vom Unendlichen bis zur Oberfläche einer Kugel des Radius r zu bringen.

iv. Ermitteln Sie den Gleichgewichtsradius R_{eq} , für den die Energie $E(R)$ minimal wird. Was bemerken Sie? Berechnen Sie den Zahlenwert dieses Radius für einen Neutronenstern mit der Masse $M = 1,4 M_{\odot}$.

40. Relativistisches ideales Fermi-Gas

Die Dichte eines idealen Gases aus Fermionen der Masse m sei so hoch, dass $\hbar/(\mathcal{V}/N)^{1/3} \gg mc$ gilt. Dann sind die meisten Impulse hochrelativistisch, $p = |\vec{p}| \gg mc$, und man kann näherungsweise die Beziehung $\varepsilon \approx pc$ verwenden.

Bestimmen Sie für diesen Fall den Fermi-Impuls und die Fermi-Energie. Welche Energie $U(\mathcal{V}, N)$ und welchen Druck $\mathcal{P}(\mathcal{V}, N)$ hat das System für $T \approx 0$?

41. Zustandsdichte des Photonengases

i. Berechnen Sie die Zustandsdichte eines Gases aus masselosen und somit immer hochrelativistischen Bosonen mit dem Spin s .

ii. Photonen sind Teilchen mit dem Spin 1, deren Spin besitzt aber nur 2 Projektionen auf einer gegebenen Achse. Wie lautet die Zustandsdichte in diesem Fall? Drücken Sie diese Zustandsdichte durch die Frequenz ν des Photons aus.