

Übung Nr. 12

Diskussionsthemen:

- Was sind die Fermi–Dirac- und die Bose–Einstein-Verteilung?
- Was ist die Zustandsdichte?

36. Fluktuationen der Besetzungszahl

Seien nicht-wechselwirkenden Fermionen oder Bosonen im thermodynamischen Gleichgewicht. Die Besetzungszahl für den durch a gekennzeichneten Ein-Teilchen-Zustand wird als n_a bezeichnet.

i. Geben Sie den Erwartungswert $\langle n_a \rangle$ der Besetzungszahl n_a in Abhängigkeit der Temperatur und des chemischen Potentials an.

ii. Berechnen Sie die Varianz von n_a .

Hinweis: Für Fermionen kann man diese Varianz ohne Berechnung erhalten. . . Sie kann auch sowohl für Fermionen als für Bosonen durch eine Ableitung von $\langle n_a \rangle$ ausgedrückt werden.

iii. Zeigen Sie, dass für Fermionen die Fluktuationen von n_a bei tiefen Temperaturen für die Energieniveaus außerhalb der Nähe der Fermi-Energie vernachlässigbar sind.

iv. Geben Sie die Varianz der Teilchenzahl und der inneren Energie im großkanonischen Gleichgewicht an.

v. Berechnen Sie für eine gegebene Ein-Teilchen-Zustandsdichte $\mathcal{D}(\varepsilon)$ für Fermionen das Verhalten bei tiefen Temperaturen der Fluktuationen der Teilchenzahl und der inneren Energie.

Hinweis: Dabei kann man die Abhängigkeit zwischen der Varianz von n_a und einer Ableitung von $\langle n_a \rangle$ benutzen.

37. Quantenkorrekturen zum idealen Gas

Berechnen Sie die durch Quanteneffekte bedingten Korrekturen zu der Zustandsgleichung, der inneren Energie und der Wärmekapazität des idealen Gases in der niedrigsten Ordnung in einem zu präzisierenden relevanten kleinen Parameter.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung von $\ln Z(\beta, \mu)$ für kleine Werte der Fugazität $e^{\beta\mu}$ und drücken Sie die letztere durch die thermische Wellenlänge λ_{th} und das Volumen pro Teilchen aus.

38. Fermionen in zwei Dimensionen

Sei ein Gas aus freien Elektronen, deren Bewegung auf eine Ebene eingeschränkt wird.

i. Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\varepsilon)$ unabhängig von der Energie ε ist.

ii. Bestimmen Sie die Fermi-Energie in Abhängigkeit von der Teilchendichte.

iii. Zeigen Sie, dass das chemische Potential bei tiefen Temperaturen exponentiell nach der Fermi-Energie geht.