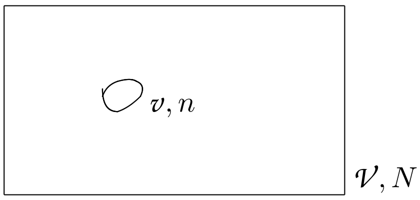
Übung Nr. 1

1. Dichtefluktuationen



Ein Behälter mit dem Volumen $\mathcal{V}$ enthält N Teilchen, die statistisch unabhängig voneinander und in $\mathcal{V}$ gleichförmig verteilt sind. Die Anzahl n der in einem kleinen Volumen v enthaltenen Teilchen ist eine Zufallsvariable.

i. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, n Teilchen in v zu finden, durch die *Binomialverteilung*

$$p_n = \binom{N}{n}\left(\frac{v}{\mathcal{V}}\right)^n\left(1-\frac{v}{\mathcal{V}}\right)^{N-n}$$

gegeben ist.

ii. Prüfen Sie, dass $\langle n\rangle = \dfrac{vN}{\mathcal{V}}$.

iii. Berechnen Sie die statistische Fluktuation (genauer: Standard-Abweichung) von n, definiert durch

$$(\Delta n)^2 \equiv \left\langle (n-\langle n\rangle)^2\right\rangle = \left\langle n^2\right\rangle - \langle n\rangle^2 .$$

Es sei ein Gas unter normalen Bedingungen. Für welche Werte von v ist die relative Fluktuation $\Delta n\,/\langle n\rangle$ kleiner als 10^{-6}?

2. Dichtefluktuationen

Es seien wie in der Aufgabe **1** N Moleküle in einem Volumen $\mathcal{V}$ und ein Bruchteil $p = v/\mathcal{V}$ des Gesamtvolumens. Der Teil $X = n/N$ der Anzahl von Molekülen, die sich im Untervolumen befinden, ist eine Zufallsvariable. Sei eine gleichförmige Verteilung angenommen.

i. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle X\rangle$ und die Standard-Abweichung ΔX von X.

Hinweis: Man kann (es ist aber nicht notwendig!) die *charakteristische Funktion*

$$G(k) \equiv \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kX}\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}k)^m}{m!}\langle X^m\rangle$$

betrachten, und insbesondere dessen zwei ersten Ableitungen bei $k = 0$.

ii. Überzeugen Sie sich, dass für große N die Binomialverteilung gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Hinweis: Man kann entweder die Stirling-Formel $k! \underset{k\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ benutzen, um

$$P(x < X < x+\mathrm{d}x) \simeq \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{N}{2\pi p(1-p)}}\,\exp\left[-\frac{N(x-p)^2}{2p(1-p)}\right]$$

zu beweisen. Oder man kann die Binomial- und Gauß-Verteilungen mit identischen Parametern (Erwartungswert, Standard-Abweichung) mit Mathematica / Maple darstellen und vergleichen.

iii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $|X - \langle X\rangle\,|$ größer als ε sei, für den Fall $N = 10^{23}$, $p = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-12}$. Was bedeutet dieses Resultat?

3. Schrotrauschen

Wegen der unstetigen Natur der Ladungsträger zeigt ein elektrischer Strom immer statistische Fluktuationen. Beispielsweise werden Elektronen aus einer geheizten Glühkathode zufällig emittiert, entsprechend dem sogenannten „glühelektrischen Effekt“. Daraus folgt ein mittlerer elektrischer Strom (genauer: mittlere „elektrische Stromstärke“) $\langle I \rangle = e\nu$, mit e der Ladung des Elektrons und ν der mittleren Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Elektronen.

Berechnen Sie die statistische Fluktuation ΔI des elektrischen Stroms über eine Zeitdauer τ. Schätzen Sie diese Fluktuation ΔI für einen mittleren Strom von $1\,\mu$A und eine Messzeit von $1\,$s ab.

Hinweis: Betrachten Sie die Zahl n der in τ emittierten Elektronen wie eine Zufallsvariable, ähnlich der Variable n der Aufgabe **1** im Limes $\mathcal{V} \to \infty$.