Übungsblatt Nr.9b (Präsenzübungen)

52. Hamilton-Formalismus in Kugelkoordinaten

In Aufgabe **31.** haben Sie die Standard Lagrange-Funktion eines Massenpunkts m in einem Potential V in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gefunden:

$$\mathcal{L}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) - V(r, \theta, \varphi). \tag{1}$$

i. Bestimmen Sie die zu den Variablen (r, θ, φ) kanonisch konjugierten Impulse $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$ und drücken Sie die Hamilton-Funktion durch die verallgemeinerten Koordinaten und die kanonischen Impulse aus.

ii. Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

53. Zweidimensionale Bewegung

Eine Punktmasse m bewege sich in der Ebene $z = 0$, in welcher ihre Position durch Polarkoordinaten (r, θ) beschrieben wird. Die potentielle Energie der Punktmasse sei

$$V(\vec{r}) = V_0 \ln \frac{r}{r_0} \tag{2}$$

mit zwei positiven Konstanten V_0, r_0.

i. Wie lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems? Stellen Sie die entsprechenden Euler–Lagrange-Gleichungen auf.

ii. Bestimmen Sie die zu (r, θ) kanonisch konjugierten Impulse (p_r, p_θ) und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch die Koordinaten und Impulse aus. Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

iii. Was ist die physikalische Bedeutung der Bewegungsgleichung für p_θ? Mit welcher Eigenschaft des Systems hängt dieses Ergebnis zusammen?

54. Phasenraumtrajektorie der gedämpften Schwingung

Betrachten Sie einen eindimensionalen, entlang der x-Achse schwingenden, gedämpften harmonischen Oszillator. Erklären Sie (mathematisch), wie seine Trajektorie in dem von x und p aufgespannten Phasenraum aussieht, wobei p den zu x konjugierten Impuls bezeichnet.

55. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Sei

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \frac{p^2}{2m} \mathrm{e}^{-\gamma t} + V(q)\, \mathrm{e}^{\gamma t} \tag{3}$$

die Hamilton-Funktion eines Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad, wobei m und γ positive Zahlen sind.

i. Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

ii. Drücken Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ des Systems durch q und $\dot{q}$ aus und stellen Sie die Bewegungsgleichung für $q(t)$ auf.

iii. Sei nun $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ mit $\omega > 0$. Wie lautet die Bewegungsgleichung aus **ii.**? Welches System beschreibt die Hamilton-Funktion (3) bzw. die von Ihnen gefundene Lagrange-Funktion?