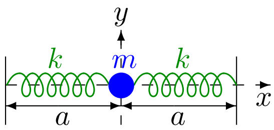
Übungsblatt Nr.9a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Starrer Körper: Was ist der Trägheitstensor? der Satz von Steiner?

*48. Transversale Schwingungen eines Kettenschwingers mit einer Masse [6 Punkte]

Eine Masse m wird durch zwei gleiche Federn (Ruhelänge ℓ_0, Stärke k) an zwei festen Punkten verbunden. Der Abstand zwischen den zwei Punkten beträgt $2a$. Die Masse kann sich nur entlang der y-Achse bewegen.



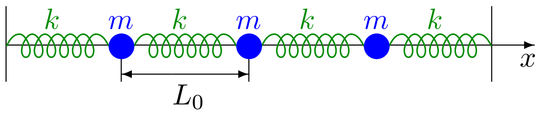
i. Sei angenommen, dass $a > \ell_0$; dann ist $y = 0$ eine Gleichgewichtsposition der Masse. Diskutieren Sie die Stabilität dieses Gleichgewichts.

Hint: Betrachten Sie kleine Ablenkungen δy (mit $|\delta y| \ll a$) aus dieser Gleichgewichtsstelle und drücken Sie die Lagrange-Funktion durch δy aus. Dabei sollten Sie den Satz des Pythagoras sowie die Taylor-Entwicklung $(1+u)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}u$ für einen geeigneten $|u| \ll 1$ verwenden.

ii. Sei nun angenommen, dass $a < \ell_0$. Können Sie ohne Berechnung sagen, wie viele Gleichgewichtspositionen es gibt, und welche (wenn überhaupt) stabil sind?

*49. Kettenschwinger mit drei Massen [10 Punkte]

Ein Kettenschwinger besteht aus drei gleichen Massen (1,2,3), die durch Federn gleicher Stärke k untereinander und mit den Wänden verbunden sind. Die Federn seien bereits in der Gleichgewichtslage des Systems mit der Kraft F vorgespannt, wobei L_0 der Gleichgewichtsabstand der Massen sei.



Es wird angenommen, dass die Bewegung nur entlang der horizontalen x-Richtung stattfinden kann. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für solche „longitudinale“ Schwingungen auf und lösen Sie sie.

*50. Trägheitstensor [4 Punkte]

Gegeben sei ein homogener Quader mit Masse M und Kantenlängen a, b und c, die jeweils parallel zur x-, y- bzw. z-Achse liegen. Berechnen Sie den Trägheitstensor des Quaders

i. im Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Quaders liegt;

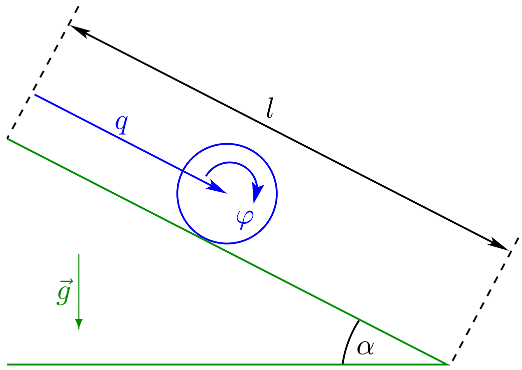
ii. direkt über die Definition des Trägheitstensors im Koordinatensystem, dessen Ursprung in einer Ecke des Quaders liegt;

iii. (Bonusfrage) im gleichen System wie in **i.**, aber unter Nutzung des Ergebnisses aus **ii.** und des Satzes von Steiner.

51. Abrollende starre Körper

i. Unter dem Einfluss des Schwerfeldes $-g\,\vec{e}_z$ rollt eine homogene Kugel mit Masse M und Radius R ohne zu gleiten eine schiefe Ebene der Länge l mit Neigungswinkel α hinab.

a) Berechnen Sie zuerst das Trägheitsmoment I der Kugel bezüglich seiner Achse.



b) Drücken Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V durch die generalisierten Koordinaten q und φ aus.

c) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es?

d) Stellen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung für die Koordinate q auf und lösen Sie sie. Bestimmen Sie die Laufzeit für die Strecke l.

ii. Neben dem homogenen Kugel der Frage **i.** und dem homogenen Zylinder der Aufgabe **47.** rollt auch ein homogener Hohlzylinder (mit Masse nur bei $r = R$) mit Masse M und Radius R ab.

Indem Sie die Schritte der Frage **i.** (Trägheitsmomente, Euler–Lagrange-Gleichungen) wiederholen, bestimmen Sie die Laufzeit des Hohlzylinders.

Welcher von den drei Körpern (Zylinder, Kugel, Hohlzylinder) legt die Strecke in der geringsten Zeit zurück? Sie können auch die Ergebnisse mit der Laufzeit eines reibungsfrei gleitenden Massenpunktes vergleichen.