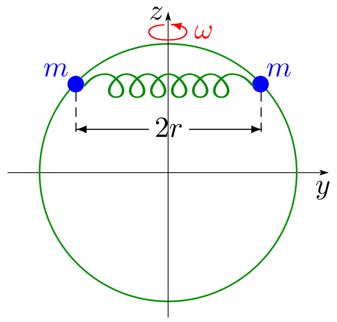
Übungsblatt Nr.8b (Präsenzübungen)

46. Zwei durch eine Feder verbundene Massen auf einem Ring

Zwei identische Massen m, die durch eine Feder verbunden sind, können sich reibungsfrei entlang eines Rings mit Radius R bewegen, wobei die Feder immer parallel zur horizontalen (x, y)-Ebene bleibt — anders gesagt sind die zwei Massen auf der gleichen Höhe z. Der Ring dreht sich um die vertikale z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$. Die Feder hat die Stärke k und ihre Ruhelänge $\ell_0 \equiv 2r_0$ ist kleiner als der Durchmesser des Rings, d.h. $r_0 < R$.



i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Drücken Sie die (Standard-)Lagrange-Funktion des Systems durch zylindrische Koordinaten (r, θ, z) aus. Zeigen Sie, dass sie sich in der Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(z)\dot{z}^2 - V_{\text{eff.}}(z) \tag{1a}$$

mit einer positionsabhängigen Masse bzw. einem eindimensionalen effektiven Potential

$$\mu(z) \equiv \frac{2m}{1 - z^2/R^2} \quad \text{bzw.} \quad V_{\text{eff.}}(z) \equiv 2k\left(\sqrt{R^2 - z^2} - r_0\right)^2 - m\omega^2(R^2 - z^2) \tag{1b}$$

umschreiben lässt.

ii. Folgern Sie aus dem effektiven Potential (1b) die möglichen Gleichgewichtspositionen z_ω der Massen. Diese Positionen lassen sich durch R und

$$\xi(\omega) \equiv \frac{2kr_0}{2k - m\omega^2} = \frac{r_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \tag{2}$$

einfach ausdrücken, wobei $\omega_0 \equiv \sqrt{2k/m}$.

Hinweis: Sie können schon die Gleichgewichtspositionen z_0 (sowie ihre Stabilität) für $\omega = 0$ anhand Ihrer physikalischen Intuition raten: diese Ergebnisse sollen Sie als Grenzwert der gesuchten z_ω im Fall $\omega = 0$ wiederfinden.

iii. Diskutieren Sie die Stabilität der Gleichgewichtspositionen z_ω. Zeigen Sie, dass sich unterschiedliche Möglichkeiten ergeben, je nachdem, ob ω kleiner oder größer als die „kritische Winkelgeschwindigkeit“

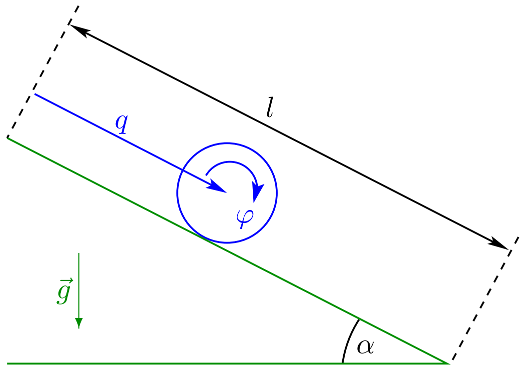
$$\omega_c \equiv \omega_0\sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)} \tag{3}$$

ist. Plotten Sie V_{eff} in Abhängigkeit von z/R für $r_0 = R/2$ und die Fälle $\omega = 0.4\omega_c$, ω_c und $1.4\omega_c$.

iv. Geben Sie die Eigenkreisfrequenzen Ω der kleinen Schwingungen um die in Frage **iii.** gefundenen stabilen Gleichgewichtsstellen. Drücken Sie Ω durch ω, ω_0 und ω_c und plotten Sie Ω in Abhängigkeit von ω/ω_c für $r_0 = R/2$.

47. Abrollender starrer Körper

Unter dem Einfluss des Schwerfeldes $-g\,\vec{e}_z$ rollt ein homogener Zylinder mit Masse M und Radius R ohne zu gleiten eine schiefe Ebene der Länge l mit Neigungswinkel α hinab.



i. Berechnen Sie zuerst das Trägheitsmoment I des Zylinders bezüglich seiner Achse.

ii. Drücken Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V durch die generalisierten Koordinaten q und φ aus.

iii. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es?

iv. Stellen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung für die Koordinate q auf und lösen Sie sie. Bestimmen Sie die Laufzeit für die Strecke l.