Übungsblatt Nr.8a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Kleine Schwingungen

*43. Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten [8 Punkte]

In der Aufgabe **31.** haben Sie die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten eines Massenpunkts in Anwesenheit eines Potentials $V(r,\theta,\phi)$ hergeleitet.

Sei jetzt angenommen, dass das Potential kugelsymmetrisch ist — d.h. $V(r)$ hängt nur vom Abstand r zum Nullpunkt ab —, und dass die Bewegung durch eine Zwangskraft so eingeschränkt wird, dass der Massenpunkt auf einer Kegeloberfläche $\theta = \theta_0$ bleiben muss.

i. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem auf.

ii. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung sich in der Form

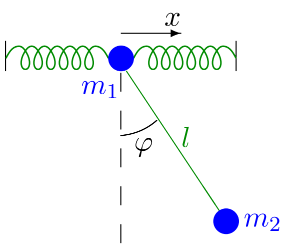
$$m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial V_{\text{eff}}\big(r(t)\big)}{\partial r}$$

umschreiben lässt. Wie lautet das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$?

iii. Was ist der physikalische Inhalt der anderen Bewegungsgleichung? Erkennen Sie dabei eine Ihnen bekannte Größe.

*44. Pendel an Federn [12 Punkte]

Eine Punktmasse m_1 ist durch zwei Federn an zwei Wänden befestigt. Beide Federn haben die gleiche Federkonstante k und ihre Ruhelänge entspricht gerade dem Fall, dass sich m_1 in der Mitte zwischen den Wänden befindet. Die Punktmasse m_1 darf sich nur entlang der horizontalen x-Achse bewegen.
Eine zweite Punktmasse m_2 ist am Ende eines masselosen Stabs der Länge l, der selbst an m_1 aufgehängt ist. Diese Punktmasse kann in der (x,y)-Ebene unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes schwingen. Sei φ der Auslenkungswinkel des Pendels.



i. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

ii. Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2 und drücken Sie die kinetischen und potentiellen Energien der Punktmassen dadurch aus. Geben Sie die Lagrange-Funktion an.

iii. Leiten Sie zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen ab.

iv. Sei nun angenommen, dass der Auslenkungswinkel φ klein ist.

a) Zeigen Sie, dass sich beide Bewegungsgleichungen jeweils in der Form

$$a_i\ddot{q}_i(t) + b_i q_i(t) = f_i\big(q_j(t), \dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t)\big)$$

schreiben lassen, mit a_i und b_i konstanten Koeffizienten, während $q_i(t)$, $i \in \{1,2\}$ die eine und $q_j(t)$ die andere generalisierte Koordinate ist.

b) (Bonusfrage: entwickeln Sie Ihre mathematische „Intuition"…) Können Sie argumentieren, welcher Term die Lösung der in **a)** gefundenen gekoppelten Gleichungen besonders erschwert.

45. Freier Massenpunkt in rotierenden Koordinaten

Ein Massenpunkt m ruht im Punkt $(x \neq 0, y \neq 0, z = 0)$ eines kartesischen Koordinatensystems in einem Inertialsystem. Zur Beschreibung seines Bewegungszustands werden verallgemeinerte Koordinaten

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases} \tag{1}$$

mit einer konstanten Zahl ω verwendet.

i. Drücken Sie x und y durch x' und y' aus und zeigen Sie, dass die (Standard) Lagrange-Funktion des Punkts

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\big) + \frac{m\omega^2}{2}\big(x'^2 + y'^2\big) - m\omega\big(\dot{x}'y' - \dot{y}'x'\big) \tag{2}$$

lautet.

Hint: Die Berechnung ist nicht kompliziert, erfordert aber ein wenig Geduld: ausgedrückt durch x', y' und ihre Ableitungen besteht $\dot{x}^2$ aus 10 Termen und $\dot{y}^2$ auch. Es wird daher empfohlen, die Schreibweisen $C \equiv \cos\omega t$, $S \equiv \sin\omega t$ (mit $C^2 + S^2 = 1$!) zu benutzen.

ii. Die Lagrange-Funktion (2) enthält nicht nur einen kinetischen Term, sondern auch ein Potential $V = -m\omega^2\big(x'^2 + y'^2\big)/2 + m\omega\big(\dot{x}'y' - \dot{y}'x'\big)$. Um die Bedeutung des letzteren nachzuvollziehen,[1] stellen Sie die Bewegungsgleichungen für x' und y' auf und vergleichen Sie sie mit der Gl. (1) der Aufgabe **12**: was erkennen Sie?

[1] Die Bedeutung lässt sich auch mit einigen Überlegungen finden.