

Übungsblatt Nr.7a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Was ist der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen?

***37. Bewegung eines Massenpunktes auf einer Zyklode** [10 Punkte]

Ein Massenpunkt m bewege sich in der (x, z) -Ebene auf der Kurve — einer Zyklode — mit Gleichung $x(z) = R \arccos(1 - z/R) + \sqrt{2Rz - z^2}$ mit $R > 0$. Das ganze System liegt im Schwerfeld $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

- i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ii. Für praktische Berechnungen ist es günstiger, die Zyklode durch die Parametrisierung

$$x(s) = R(s + \sin s) \quad , \quad z(s) = R(1 - \cos s) \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

zu beschreiben. Drücken Sie die (Standard-)Lagrange-Funktion des Systems durch s und \dot{s} aus und prüfen Sie nach, dass sie sich in der Form

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = 2mR^2 \dot{s}^2 \cos^2 \frac{s}{2} - 2mgR \sin^2 \frac{s}{2} \quad (2)$$

schreiben lässt.

Hint: $\cos s = 2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2}$.

- iii. Sei $q \equiv 4R \sin \frac{s}{2}$ eine neue verallgemeinerte Koordinate. Drücken Sie die Lagrange-Funktion (2) durch q und \dot{q} aus. Stellen Sie die entsprechende Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung auf. Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?
- iv. (**Bonusfrage**) Plotten Sie eine Zyklode anhand Ihrer Lieblings-Software zur grafischen Darstellung.

***38. Lagrange-Funktion** [10 Punkte]

Betrachten Sie ein ebenes Pendel (im Schwerfeld \vec{g}) mit einer Masse m_2 am Ende eines masselosen Stabs (Länge l), dessen Aufhängepunkt mit der Masse m_1 sich entlang einer horizontalen Gerade reibungslos bewegen kann (Abb. 1).

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und leiten Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab.

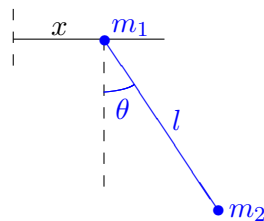


Abb. 1

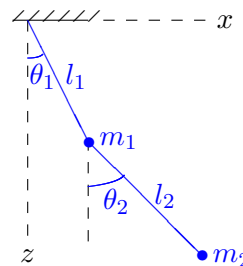


Abb. 2

39. Lagrange-Funktion (2)

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für das ebene Doppelpendel im Schwerfeld \vec{g} von Abb. 2 (mit masselosen Stäben) und leiten Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ab.