Übungsblatt Nr.6b (Präsenzübungen)

34. Isotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator

In Aufgabe **24.** haben Sie das Potential $V = \frac{1}{2}k\vec{r}^2$ eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators kennengelernt. Geben Sie die Lagrange-Funktion eines solchen Oszillators der Masse m und die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen

i. in kartesischen Koordinaten und **ii.** in Kugelkoordinaten an.

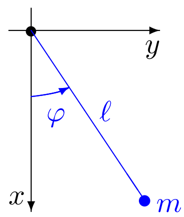
35. Ebenes Pendel mit zeitabhängiger Länge

i. Vorbereitung

a) Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen?

b) Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

ii. Betrachten Sie ein ebenes Pendel bestehend aus einer Masse m am Ende eines masselosen Stabs dessen Länge ℓ mit der Zeit variieren kann.



a) Wie viele Freiheitsgrade gibt es?

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

d) Angenommen $\ell(t) = \ell_0 + \alpha t$ mit konstanten Zahlen ℓ_0 und α. Zeigen Sie aus dem Ergebnis von **ii.c)**, dass sich für kleine Ablenkungen $\varphi(t)$ die Differentialgleichung

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\ell^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ell} + \frac{g}{\alpha^2}\varphi = 0$$

ergibt — die Lösung dieser Gleichung wird *nicht* gefragt.

36. Lagrange-Funktion

Betrachten Sie eine Perle, die reibungsfrei auf einer Helix (Schraubenlinie) mit Ganghöhe H und Radius R im Schwerefeld der Erde gleitet. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für die Perle und leiten Sie die zugehörige(n) Euler–Lagrange-Gleichung(en) ab.