Übungsblatt Nr.6a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Was ist die Lagrange-Funktion? die Wirkung? das Hamiltonsche Prinzip? Wie lauten die Euler–Lagrange-Gleichungen?

*30. Lenz-Vektor und Kepler-Problem [10 Punkte]

Wir betrachten das Kepler-Problem mit dem Potential $V(r) = -\alpha/r$ im üblichen Koordinatensystem mit mitbewegten Basisvektoren $\left(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_z\right)$, wobei $\vec{e}_z$ senkrecht auf der Ebene der Bahnkurve steht.

i. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse μ im Potential $V(r)$ in der Form einer Erhaltungsgleichung $\mathrm{d}\vec{B}(t)/\mathrm{d}t = \vec{0}$ umgeschrieben werden kann, wobei der erhaltene Vektor durch

$$\vec{B}(t) \equiv \frac{\ell}{\alpha}\vec{v}(t) - \vec{e}_\theta(t) \tag{1}$$

gegeben ist. Dabei ist ℓ die Komponente entlang $\vec{e}_z$ des Drehimpulses $\vec{\ell}$ des Massenpunkts.

Hint: Drücken Sie $\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)/\mathrm{d}t$ durch $\vec{e}_r(t)$ und $\dot{\theta}(t)$ aus und benutzen Sie die Beziehung zwischen $\dot{\theta}(t)$ und ℓ.

ii. Folgern Sie daraus, dass der (Laplace–Runge–Lenz-)Vektor

$$\vec{A}(t) \equiv \frac{1}{\alpha}\vec{\ell} \times \vec{v}(t) + \vec{e}_r \tag{2}$$

ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

iii. Zeigen Sie, dass die in Gl. (1)–(2) definierten Vektoren der Gleichung

$$\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}$$

genügen, wobei $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$ die Gesamtenergie des Massenpunkts ist.

*31. Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten [10 Punkte]

Sei $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$ die Bahnkurve eines Massenpunkts, parametrisiert mithilfe kartesischer Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Eine entsprechende Parametrisierung durch *Kugelkoordinaten* $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ wird definiert durch

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t), \quad z(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{3}$$

Die zugehörigen Basisvektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ werden durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z \equiv \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta(t) + r(t)\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t) \tag{4}$$

definiert.

i. Drücken Sie $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ aus. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\left(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_\varphi(t)\right)$ auf 1 normiert sind und ein orthogonales Rechtssystem bilden.

ii. Wir wollen den Lagrange-Formalismus verwenden, um die Bewegungsgleichungen eines Massenpunkts in Anwesenheit eines Potentials $V(r, \theta, \phi)$ in sphärischen Koordinaten herzuleiten.

a) Drücken Sie die kinetische Energie des Massenpunkts durch r, θ, φ und ihre Zeitableitungen aus.

b) Benutzen Sie die Euler–Lagrange-Gleichungen bezüglich der Kugelkoordinaten, um die gesuchten Bewegungsgleichungen zu schreiben.

32. Lenz-Vektor und Kepler-Problem (2)

Diese Aufgabe ist die Fortsetzung der Aufgabe **30.**

Bilden Sie das Skalarprodukt aus $\vec{A}$ und dem Ortsvektor $\vec{x}(t)$ des Massenpunkts. Indem Sie $\epsilon \equiv |\vec{A}|$ und $p \equiv \ell^2/\mu\alpha$ definieren und den Winkel θ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{A}$ einführen, was erkennen Sie?

33. Zentralkraftproblem

Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\vec{\ell}$ im Zentralpotential $V(r) = -\alpha/r^2$ mit $\alpha > 0$.

Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie seinen Verlauf und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahnkurve des Massenpunkts qualitativ. Es gibt insgesamt drei verschiedene physikalisch sinnvolle Fälle für E und ℓ. Welche?