Übungsblatt Nr.5b (Präsenzübungen)

27. Minimale Wirkung für einen Massenpunkt im Schwerefeld

Die Lagrange-Funktion für die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts im Schwerefeld $-g\,\vec{e}_z$ lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz. \tag{1}$$

Berechnen Sie das entsprechende Wirkungsintegral $S[z(t)]$ zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 0$ und $t_2 > 0$ für eine Bahnkurve $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + f(t)$. Dabei ist f eine stetig differenzierbare Funktion, die am Rand verschwindet: $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Zeigen Sie, dass die Wirkung S minimal für $f(t) = 0$ ist.

28. Lagrange-Funktionen

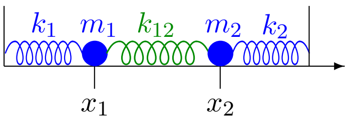
In dieser Aufgabe bezeichnet $\vec{E}$ einen konstanten Vektor und q eine reelle Zahl.

i. Sei $\mathcal{L}_1(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + q\vec{E}\cdot\vec{x}$ eine Lagrange-Funktion. Wie lautet die zugehörige (vektorielle) Bewegungsgleichung? Welches physikalische System beschreibt die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}_1$?

ii. Sei nun $\mathcal{L}_2(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\vec{E}\cdot\dot{\vec{x}}t$ eine zweite Lagrange-Funktion. Wie lautet die zugehörige Bewegungsgleichung? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

29. Gekoppelte harmonische Oszillatoren

Zwei harmonische Oszillatoren mit jeweiligen Federkonstanten k_1, k_2 und Massen m_1, m_2 seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder (Federkonstante k_{12}) an einander gebunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, und die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren jeweiligen Ruhelagen werden mit x_1 und x_2 bezeichnet.



i. Wie lautet die „Standard" Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ für dieses System?

Hinweis: Die potentielle Energie besteht aus drei Beiträgen: V_1, V_2 (für die individuellen Oszillatoren) und V_{12} (für ihre Wechselwirkung).

ii. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.