Übungsblatt Nr.5a (Hausübungen)

Diskussionsthemen:
- Wie lautet die newtonsche Gravitationskraft? Was ist das entsprechende Potential?
- Was sind die Kepler-Gesetze?

*24. Isotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator [6 Punkte]

Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\ell = |\vec{\ell}|$ im Zentralpotential $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ mit $k > 0$. Berechnen Sie das (in der Vorlesung eingeführte) effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie seinen Verlauf und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahnkurve des Massenpunkts qualitativ.

*25. Zentralkraftproblem [14 Punkte]

In Zentralkraftproblemen ist der Drehimpuls $\vec{\ell}$ erhalten, so dass die Bahnkurven in einer auf $\vec{\ell}$ senkrechten Ebene bleiben. Sei $\big(r(t), \theta(t)\big)$ die Parametrisierung einer solchen Bahnkurve, und zwar für die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse μ in einem Potential $V\big(|\vec{r}|\big)$, wobei $r(t)$ bzw. $\theta(t)$ den Abstand vom Kraftzentrum bzw. den Winkel relativ zu einer festen Richtung bezeichnet.

i. Drücken Sie den Betrag ℓ des Drehimpulses und die Gesamtenergie E des Massenpunkts durch $r(t)$, $\theta(t)$ und ihre Zeitableitungen aus. Zeigen Sie, dass sich E in der Form

$$E = \frac{\ell^2}{2\mu r^4}\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right] + V(r) \tag{1}$$

schreiben lässt.

ii. Unter dem Einfluss eines Zentralkraftfeldes $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = f(r)\,\vec{e}_r$ beschreibt ein Massenpunkt die Bahnkurve (in Polarkoordinaten) $r(\theta) = 2a\cos\theta$ mit einer konstanten Zahl $a > 0$.

a) Zeigen Sie, dass diese Bahnkurve ein Kreis ist.

b) Geben Sie das Kraftgesetz $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$ an.

Hint: Benutzen Sie Gl. (1), abgeleitet nach r.

iii. Jetzt ist die Bahnkurve des Massenpunkts eine Spiralbahn $r(\theta) = a\,\mathrm{e}^{\theta}$ mit $a > 0$. Was ist das entsprechende Kraftgesetz?

iv. Gleiche Frage wie **ii.b** und **iii.**, jetzt für die Bahnkurve $r(\theta) = a\tanh(\theta/\sqrt{2})$ mit $a > 0$, wobei $\tanh(x) \equiv \sinh(x)/\cosh(x)$ den Tangens Hyperbolicus bezeichnet.

Hint: Die Ableitung $\tanh'(x)$ kann durch $\tanh(x)$ ausgedrückt werden.

Diese Aufgabe zeigt, dass das Kraftgesetz aus der Bahnkurve rekonstruiert werden kann. Somit wusste Newton (dank Kepler), dass die Bahnkurven der Planeten Ellipsen $r(\theta) = p/(1 + \epsilon\cos\theta)$ sind, woraus er „sein“ Gravitationsgesetz herleiten konnte...

26. Sätze von König

Sei Σ ein Mehrteilchensystem mit Gesamtmasse M und $\mathcal{B}^*_\Sigma$ das zugehörige Schwerpunktsystem (in welchem der Gesamtimpuls $\vec{P}^*(t)$ des Systems Null ist). Der Gesamtdrehimpuls bzw. die gesamte kinetische Energie von Σ relativ zu $\mathcal{B}^*_\Sigma$ wird mit $\vec{L}^*(t)$ bzw. $T^*(t)$ bezeichnet.

Sei $\mathcal{B}$ ein Bezugssystem, das relativ zu $\mathcal{B}^*_\Sigma$ *nicht* rotiert. Mit $\vec{P}(t)$, $\vec{L}(t)$ und $T(t)$ werden der Gesamtimpuls, der Gesamtdrehimpuls und die gesamte kinetische Energie des Mehrteilchensystems bezüglich

$\mathcal{B}$ bezeichnet, während $\vec{X}(t)$ die Bahnkurve des Schwerpunkts von Σ relativ zu $\mathcal{B}$ ist. Beweisen Sie die beiden Sätze von König, und zwar

i. 1. Satz von König $\vec{L}(t) = \vec{L}^*(t) + \vec{X}(t) \times \vec{P}(t)$;

ii. 2. Satz von König $T(t) = T^*(t) + \dfrac{\vec{P}(t)^2}{2M}$.

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Sätze?