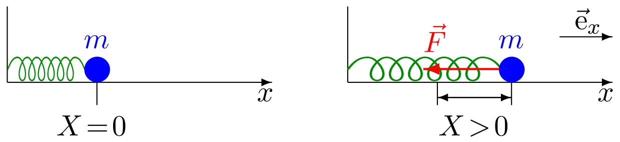
Übungsblatt Nr.4b (Präsenzübungen)

21. Energiesatz in einem Zweikörpersystem

Zeigen Sie, dass die gesamte kinetische Energie eines Systems aus zwei Punktmassen m_1, m_2 in die Energie des Schwerpunkts und die kinetische Energie der Relativbewegung (d.h. eines fiktiven Massenpunkts mit der reduzierten Masse) aufspaltet.

22. Harmonischer Oszillator

Ein oft verwendetes Modell der theoretischen Physik ist jenes des *harmonischen Oszillators*. Das anschaulichste Anwendungsbeispiel ist die Modellierung der Kraft, die durch eine Feder auf eine Masse ausgeübt wird: sei angenommen, dass die Feder längs der x-Achse gerichtet ist, und dass sich die Masse nur entlang dieser Richtung bewegen kann. Wenn X die Auslenkung der Masse aus ihrer Ruhelage bezeichnet, dann übt die Feder die Kraft $\vec{F} = -kX\,\vec{e}_x$ auf die Masse aus, wobei $k > 0$ die Federkonstante ist.



i. Bewegungsgleichung

Vernachlässigen Sie die Schwerkraft auf die Masse (m)[1] und stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Position der Masse auf. Wie lautet die allgemeine Lösung zu dieser Gleichung? Warum spricht man von einem „harmonischen Oszillator"?

Hinweis: Sie dürfen den Nullpunkt $x = 0$ der x-Achse in der Ruhelage $X = 0$ der Masse nehmen, und ab jetzt X durch x im Ausdruck der Kraft ersetzen.

ii. Potential

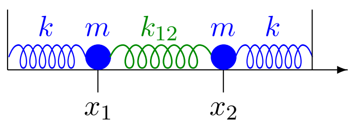
Aus welchem Potential $V(\vec{r})$ lässt sich die Kraft ableiten?

iii. Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Der harmonische Oszillator der Fragen **i.** und **ii.** ist eindimensional — seine Bewegung ist auf eine einzige Dimension eingeschränkt. Können Sie das Ergebnis aus **ii.** verallgemeinern, und das Potential für einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator schreiben? Wie lautet die zugehörige Kraft?

23. Gekoppelte harmonische Oszillatoren

Zwei identische harmonische Oszillatoren (Federkonstante k, Masse m) seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder (Federkonstante k_{12}) an einander gebunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, und die Auslenkungen der beiden Massen m aus ihren jeweiligen Ruhelagen werden mit x_1 und x_2 bezeichnet.



i. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

ii. Führen Sie $X(t) = \frac{1}{2}[x_1(t)+x_2(t)]$ und $x(t) = x_1(t)-x_2(t)$ ein. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $X(t)$ und $x(t)$? Was haben Sie dabei gewonnen? Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $X(t)$ und $x(t)$ an.

[1] Eigentlich sorgt eine *Zwangskraft*, die der Schwerkraft entgegenwirkt, dafür, dass die Masse auf der x-Achse bleibt: die Resultierende aus Zwangs- und Schwerkraft ist Null.