Übungsblatt Nr.3a (Hausübungen)

Diskussionsthemen:
- Was sind Galilei-Transformationen?
- Was sind Scheinkräfte? Welche kennen Sie?

*12. Gedämpfter harmonischer Oszillator [10 Punkte]

Die Bewegungsgleichung für einen gedämpften 1-dimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$m\ddot{x} + \alpha_{\mathrm{R}}\dot{x} + m\Omega^2 x = 0.$$

i. Lösen Sie diese für vorgegebene Anfangswerte x_0 und v_0 für x und $\dot{x}$ zur Zeit $t = 0$.

ii. Diskutieren Sie die beiden Fälle $\alpha_{\mathrm{R}}/2m < \Omega$ (Schwingfall) und $\alpha_{\mathrm{R}}/2m > \Omega$ (Kriechfall). Skizzieren Sie für jeden dieser Fälle eine typische Trajektorie $x(t)$.

iii. Wie lautet die Lösung im Grenzfall $\alpha_{\mathrm{R}}/2m \to \Omega$? (Hinweis: Drücken Sie zunächst die Lösung für den Schwingfall durch Cosinus- und Sinus-Funktionen aus, und betrachten Sie dann diesen Grenzfall.)

*13. Allgemeine Galilei-Transformationen [10 Punkte]

Eine allgemeine Galilei-Transformation $\mathcal{G}(\tau, \vec{b}, \mathscr{R}, \vec{u})$ zwischen zwei Inertialsystemen lautet

$$t' = t - \tau, \qquad \vec{r}\,' = \mathscr{R}\big(\vec{r} - \vec{u}t - \vec{b}\big), \tag{1}$$

wobei die Zeitverschiebung τ, die Verschiebung $\vec{b}$, die Drehmatrix $\mathscr{R}$ und die Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ konstant sind.

Betrachten Sie zwei Galilei-Transformationen $\mathcal{G}(\tau, \vec{b}, \mathscr{R}, \vec{u})$ und $\mathcal{G}(\tau', \vec{b}\,', \mathscr{R}', \vec{u}\,')$. Berechnen Sie die Transformation, die sich ergibt, wenn beide hintereinander ausgeführt werden. Folgern Sie daraus die Inverse einer allgemeinen Galilei-Transformation.

14. Eindimensionale Bewegung mit Reibungskraft

Ein Körper bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss der Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(v)$ nach folgender Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = F_{\mathrm{R}}(v), \quad v \geq 0. \tag{2}$$

Die Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(v)$ ist durch zwei positive Parameter charakterisiert, die Haftreibung H und den Reibungskoeffizienten γ; sie hat die Form

$$F_{\mathrm{R}}(v) = -H\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma v}{H}\right)^2}. \tag{3}$$

i. Geben Sie die Lösung $v(t)$ der Bewegungsgleichung (2). Trennen Sie dazu die Variablen und verwenden Sie Hyperbelfunktionen.

Machen Sie sich vorher die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen klar.[1] Zeigen bzw. ermitteln Sie:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{4}$$

$$\sinh(x+y) = ? \quad , \quad \cosh(x+y) = ? \tag{5}$$

$$\sinh'(x) = ? \quad , \quad \cosh'(x) = ? \tag{6}$$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = ? \quad , \quad \operatorname{arcosh}'(x) = ? \tag{7}$$

[1] Zur Erinnerung(?) gelten $\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Stellen Sie die Umkehrfunktionen mittels des natürlichen Logarithmus ln dar.

ii. Bestimmen Sie die Stoppzeit und stellen Sie diese als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit graphisch dar.

iii. Bestimmen Sie die Wegstrecke, auf der ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Stehen kommt.