Übungsblatt Nr.15a (Hausübungen)

Diskussionsthemen:
- Wie lautet die klassische Wellengleichung (D'Alembert-Gleichung)? Was sind die Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen im Vakuum?
- Wie lautet die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes?

87. Elektrodynamik im Vakuum

i. Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen an.

ii. Seien (x, y, z) kartesische Koordinaten. Betrachten Sie den Ansatz

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \alpha\,\vec{e}_x \cos(\omega t - kz) \quad , \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \beta\,\vec{e}_y \cos(\omega t - qz) \tag{1}$$

wobei ω eine gegebene Konstante ist. Welche Bedingungen müssen die vier Konstanten k, q, α, β erfüllen, so dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho_{\text{el.}} = 0$, $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$) sind?

88. Sphärische Wellen

Für eine kugelsymmetrische skalare Funktion $f(r)$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ gilt

$$\triangle f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big[r f(r)\big].$$

Bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösung $u(t,r)$ der klassischen Wellengleichung

$$\triangle u(t,r) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Hint: Die letzte angegebene Formel für den Laplace-Operator ist hier (wie oft) die günstigste.

89. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit elektromagnetischen Potentialen der Form

$$\Phi(t,\vec{r}) = \lambda c f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \qquad \vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{\varepsilon} f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \tag{3}$$

mit λ und ω bzw. $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{k}$ zeit- und ortsunabhängigen reellen Zahlen bzw. Vektoren und f einer skalaren Funktion.

Zur Erinnerung gelten für beliebige f_1, f_2, $\vec{g}$ die Identitäten

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\big[f_1(\vec{r})f_2(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]f_2(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}f_2(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\cdot\big[f_1(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]\cdot\vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\times\big[f_1(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]\times\vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}\times\vec{g}(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Die Formel für das doppelte Kreuzprodukt ist $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

i. Wie lauten die zugehörigen Felder $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$?

Hint: $\vec{\nabla}f(\vec{k}\cdot\vec{r}) = \vec{k}f'(\vec{k}\cdot\vec{r})$ mit f' der Ableitung von f.

ii. Prüfen Sie nach, dass die Transformation

$$\lambda \to \lambda' \equiv \lambda + \alpha\frac{\omega}{c}, \qquad \vec{\varepsilon} \to \vec{\varepsilon}' \equiv \vec{\varepsilon} + \alpha\vec{k} \tag{4}$$

mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Berechnen Sie die Divergenz des elektrischen Feldes. Folgern Sie daraus, dass die Maxwell-Gauß-Gleichung (ohne Quellterm) zur folgenden Beziehung führt:

$$\lambda\vec{k}^2 = \frac{\omega}{c}\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}. \tag{5}$$

iv. Sei angenommen, dass $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$.

a) Zeigen Sie, dass die Potentiale (3) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügen (obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde). (*Hint*: Gl. (5))

b) Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\lambda = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese Bedingung? Überprüfen Sie, dass man die bekannten Eigenschaften von $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.