Übungsblatt Nr.14a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Wie lauten die Maxwell-Gleichungen? Wie lassen sich die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus Potentialen ableiten? Ist die Definition dieser Potentiale eindeutig?

*83. Definition des Amperes [8 Punkte]

Zwei dünne, unendlich lange Leiter verlaufen parallel mit einem Abstand von $d = 1$ m und werden mit einem Strom von $I = 1$ A durchflossen.

i. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ des einen Leiters mithilfe des Biot–Savart-Gesetzes.[1] Hierbei werden Sie auf folgendes Integral stoßen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Versuchen Sie dieses zu lösen. Falls Sie zu keinem Ergebnis kommen, dürfen Sie das Integral nachschlagen.

ii. Berechnen Sie die Kraft auf den anderen Leiter pro Meter Leiterlänge. Nehmen Sie für die magnetische Feldkonstante $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$.
Das Ergebnis ist kein Zufall: Das Ampere war bis 2019 gerade als die Stromstärke definiert, bei der sich die berechnete Kraft ergibt.

*84. Dipolstrahler [12 Punkte]

Das Vektorpotential eines mit Kreisfrequenz ω funktionierenden Dipolstrahlers lautet

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega \vec{P} \sin(kr - \omega t)}{r} \tag{1}$$

mit $k \equiv \omega/c$, $r \equiv |\vec{r}|$, und dem elektrischen Dipolmoment $\vec{P}$ des Strahlers, der im Punkt $\vec{r} = \vec{0}$ liegt.

i.

a) Seien $f(\vec{r})$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{V}$ ein konstanter Vektor; prüfen Sie die folgende Identität:

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r})\,\vec{V}\,\right] = \left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] \times \vec{V}.$$

b) Bestimmen Sie die dem Vektorpotential (1) entsprechenden magnetischen und elektrischen Felder $\vec{B}(t, \vec{r})$ und $\vec{E}(t, \vec{r})$.

Hint: Das Skalarpotential brauchen Sie *nicht*, um $\vec{E}$ zu bestimmen. Vgl. Aufgabe **81.**

ii. Zeigen Sie, dass in der sogenannten „Nahzone" $kr \ll 1$ der Betrag der magnetischen Induktion viel kleiner ist als der Quotient aus dem elektrischen Feld und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c.

iii. Zeigen Sie, dass in der „Fernzone" $kr \gg 1$ die typischen Eigenschaften der elektromagnetischen Welle im Vakuum

$$\vec{e}_r \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{e}_r \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \left|\vec{B}(t, \vec{r})\right| = \frac{\left|\vec{E}(t, \vec{r})\right|}{c}$$

erfüllt sind, wobei $\vec{e}_r \equiv \vec{r}/r$.

Hint: Für diese Fernfelder dürfen Sie Terme in $1/kr$ gegen 1 vernachlässigen.

iv. (Bonusfrage) Wie lautet das Skalarpotential $\Phi(t, \vec{r})$, das dem Vektorpotential (1) entspricht?

[1] In der Vorlesung am 10.01. wurde zwar gesagt, dass die Herleitung des Gesetzes auf der Abwesenheit von Strömen im Unendlichen beruht. Sie dürfen diese Aussage hier vergessen.