Übungsblatt Nr.12b (Präsenzübungen)

75. Multipolmomente eines elektrisch geladenen Stabs

Ein unendlich dünner, homogen geladener Stab der Länge ℓ liegt entlang der z-Achse. Sei Q die Gesamtladung des Stabs.

i. Geben Sie die elektrische Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ des Stabs an. (Wählen Sie den Ursprungspunkt des Koordinatensystems in der Mitte des Stabs.)

ii. Bestimmen Sie

a) das elektrische Dipolmoment $\vec{P}$ und

b) die elektrischen Quadrupolmomente Q^{ij} des Stabs.

76. Gleichförmiges Magnetfeld

Seien $\vec{a}(\vec{r})$ und $\vec{b}(\vec{r})$ zwei Vektorfelder. Dann gelten die Identitäten

$$\vec{\nabla}\cdot\big[\vec{a}(\vec{r})\times\vec{b}(\vec{r})\big] = \vec{b}(\vec{r})\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r})\big] - \vec{a}(\vec{r})\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{b}(\vec{r})\big] \tag{1}$$

und

$$\vec{\nabla}\times\big[\vec{a}(\vec{r})\times\vec{b}(\vec{r})\big] = \big[\vec{\nabla}\cdot\vec{b}(\vec{r})\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{\nabla}\cdot\vec{a}(\vec{r})\big]\vec{b}(\vec{r}) + \big[\vec{b}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\big]\vec{b}(\vec{r}). \tag{2}$$

Dabei ist für jeden Vektor $\vec{c}$ mit den kartesischen Koordinaten $\{c^i\}$ der Differentialoperator $\vec{c}\cdot\vec{\nabla}$ durch

$$\vec{c}\cdot\vec{\nabla} \equiv c^1\frac{\partial}{\partial x^1} + c^2\frac{\partial}{\partial x^2} + c^3\frac{\partial}{\partial x^3}$$

gegeben.

i. Sei $\vec{A}(\vec{r}) \equiv \dfrac{1}{2}\vec{B}_0\times\vec{r}$ ein Vektorpotential, wobei $\vec{B}_0$ ein konstanter Vektor ist.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla}\times\vec{r}$ (vgl. Aufgabe **6.i.**). Zeigen Sie mithilfe von Gl. (1), dass das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ die Coulomb-Eichbedingung erfüllt.

b) Berechnen Sie nun $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$. Folgern Sie daraus und aus Gl. (2) die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$, die sich aus $\vec{A}(\vec{r})$ ableiten lässt.

c) Sei angenommen, dass $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_3$. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{A}(\vec{r})$ und finden Sie damit die Ergebnisse aus **i.a)** und **b)** für $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ wieder.

ii. Sei $\vec{A}'(\vec{r}) = x^1 B_0\,\vec{e}_2$. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz dieses Vektorfeldes und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus **i.c)**.

iii. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie die Identitäten (1) und (2) beweisen.

Hinweis: Verwenden Sie kartesische Koordinaten und die Identität $\epsilon^{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{k\ell}$.