

Übungsblatt Nr.10b (Präsenzübungen)

59. δ -Distribution (1)

Bestimmen Sie folgende Integrale:

i. $\int f'(x)g(x)\delta(x-x_0) dx$

ii. $\int x\delta(x-a)\Theta(x-b)\Theta(c-x) dx$

iii. $\int x^2\delta''(x) dx$

iv. $\int_{-5}^5 \frac{x^2}{30}\delta(\cos x) dx$

60. δ -Distribution (2)

i. Betrachten Sie Polarkoordinaten (r, θ) in der Ebene. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta)$ hat man die Gleichung $\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \alpha(r, \theta)\delta(r)$, wobei \mathbf{r} den zweidimensionalen Ortsvektor in der Ebene bezeichnet?

ii. Betrachten Sie Kugelkoordinaten (r, θ, φ) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, \varphi)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, \varphi)\delta(r)$?

iii. Betrachten Sie nun Zylinderkoordinaten (r, θ, z) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, z)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, z)\delta(r)$?

iv. Bestimmen Sie das Integral $\int \delta(\vec{r} \cdot \vec{e}_z - h)\delta(\vec{r}^2 - R^2) d^3\vec{r}$.

61. Ladungsverteilungen

Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$ für folgende Objekte mit Gesamtladung Q an:

i. eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R ;

ii. einen unendlich dünnen, homogen geladenen Draht, der zu einem Kreis mit Radius R gebogen ist;

iii. eine unendlich dünne, homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R ;

iv. einen homogen geladenen Hohlzylinder mit Innenradius R_1 , Außenradius R_2 und Höhe h .

62. δ -Distribution (3)

i. Sei $\delta_\epsilon(x) \equiv \epsilon/[\pi(x^2 + \epsilon^2)]$; prüfen Sie, dass δ_ϵ eine Darstellung der δ -Distribution ist. Insbesondere müssen Sie $\int \delta_\epsilon(x) dx = 1$ zeigen.

ii. Für welchen Wert von α ist $\delta_\epsilon(x) \equiv \alpha[\delta(x+\epsilon) + \delta(x-\epsilon)]$ eine Darstellung der δ -Distribution?

iii. Gleiche Frage für $\delta_\epsilon \equiv \alpha e^{-|x|/\epsilon}$.

iv. Für welchen Wert von α gilt $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta(x+\epsilon) - \delta(x-\epsilon)}{\epsilon} = \alpha\delta'(x)$?