Übungsblatt Nr.10a (Hausübungen)

Diskussionsthema: Wie kommt man von einer Lagrange-Funktion auf eine Hamilton-Funktion? Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

*56. Hamilton-Formalismus [10 Punkte]

In Aufgaben **36.** und **38.** haben Sie die Lagrange-Funktionen von zwei Systemen hergeleitet:

$$\mathcal{L}_1(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left[R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{mgh}{2\pi}\varphi \quad \text{für Aufgabe } \textbf{36.};$$

$$\mathcal{L}_2(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + m_2 gl\cos\theta \quad \text{für Aufgabe } \textbf{38.}$$

Bestimmen Sie jeweils die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der kanonischen Impulse. Leiten Sie daraus die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ab.

*57. Phasenraum [10 Punkte]

Ein Massenpunkt in einer Dimension mit Koordinate x bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +ax & \text{für } x \geq 0, \\ -bx & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

mit $a, b \geq 0$.

i. Leiten Sie die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

ii. Skizzieren Sie das Potential und die Phasenraumtrajektorien. Für letztere betrachten Sie vier verschiedene Fälle: $a = b = 1$; $a = 2b = 2$; $a = \infty$ und $b = 1$; $a = 0$ und $b = 1$.

58. Poisson-Klammern

Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L^i, p^j\}$ der kartesischen Komponenten von Drehimpuls $\vec{L}$ und Impuls $\vec{p}$ eines Massenpunkts.