

Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Zentralkraftproblem

(22 P.)

In der Bewegung einer Punktmasse m in einem Zentralpotential $V(|\vec{r}|)$ ist der Drehimpuls $\vec{\ell}$ der Punktmasse erhalten. Wenn $r(t)$ den Abstand vom Kraftzentrum zur Zeit t bezeichnet, so lautet die (erhaltene) Gesamtenergie des Systems

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}(t)^2 + \frac{\ell^2}{2mr(t)^2} + V(r(t)) \equiv \frac{m}{2} \dot{r}(t)^2 + V_{\text{eff}}(r(t)) \quad (1)$$

mit $\ell \equiv |\vec{\ell}|$ und der effektiven potentiellen Energie V_{eff} .

i. Damit es eine stabile Kreisbahn mit einem endlichen Radius $r = r_0$ gibt, muss V_{eff} an dieser Stelle ein Minimum besitzen.

a) Welche mathematischen Bedingungen müssen erfüllt werden? Was bedeuten diese Bedingungen für die „effektive Kraft“ $\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla}V_{\text{eff}}(r)$?

b) Sei angenommen, dass die potentielle Energie $V(r)$ einer Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{K}{r^n} \vec{e}_r \quad (2)$$

entspricht, wobei $\vec{e}_r \equiv \vec{r}/r$. Wie lautet $V(r)$? Unter welchen Bedingungen über K und n gibt es eine stabile Kreisbahn?

ii. Wir kommen jetzt zum Fall eines beliebigen Zentralkraftfeldes $\vec{F}(\vec{r}) \equiv F(r) \vec{e}_r$ zurück. Sei $g(r) \equiv -F(r)/m$.

a) Wie lautet die unter i.a) definierte effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{r}) \equiv F_{\text{eff}}(r) \vec{e}_r$?

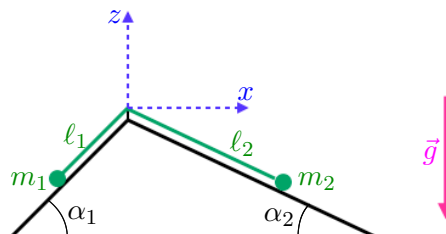
b) Das zweite newtonsche Gesetz nimmt die Form $m\ddot{r}(t) = F_{\text{eff}}(r(t))$ an. Es wird angenommen, dass r_0 den Radius einer stabilen Kreisbahn für das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ darstellt. Die Punktmasse wird durch eine kleine nicht-spezifizierte Störung aus diesem Abstand abgelenkt, was zu einer Bahn $r(t) = r_0 + \varrho(t)$ mit $|\varrho(t)| \ll r_0$ führt.

Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\varrho(t)$ auf (Hinweis: Taylor-Entwicklung: $(1+u)^\alpha \simeq 1 + \alpha u$ für $|u| \ll 1$). Unter welcher Bedingung über r_0 , $g(r_0)$ und die Ableitung $g'(r_0)$ beschreibt diese Bewegungsgleichung kleine harmonische Schwingungen? Wie lautet deren Kreisfrequenz ω ?

2. Zwei durch Seil verbundene Massen auf schiefen Ebenen

(12 P.)

Zwei Punktmassen m_1 und m_2 seien durch ein massenloses Seil konstanter Länge ℓ verbunden. Sie können sich reibungslos in der dargestellten Anordnung im Schwerfeld $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ bewegen. Die Positionen der Massen werden durch die Längen ℓ_1 , ℓ_2 gekennzeichnet. Es wird angenommen, dass beide Massen in der Ebene $y = 0$ bleiben.



i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) auf.

3. Punktmasse auf einem Paraboloid (30 P.)

i. Lagrange-Formalismus

Eine Punktmasse m bewegt sich reibungslos im Schwerfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ auf der Innenfläche des Paraboloids mit der Gleichung $x^2 + y^2 = az$ mit $a > 0$.

- Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten (r, θ, z) .

- Zeigen Sie, dass sich die Punktmasse auf einem horizontalen Kreis in der Ebene $z = h$ bewegen kann, vorausgesetzt, ihr wird eine passende Anfangswinkelgeschwindigkeit verliehen. Bestimmen Sie diese Winkelgeschwindigkeit.

ii. Hamilton-Formalismus

- Bestimmen Sie die zu (r, θ) kanonisch konjugierten Impulse (p_r, p_θ) und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch die Koordinaten und Impulse aus.
- Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an. Was ist die physikalische Bedeutung der Bewegungsgleichung für p_θ ? Mit welcher Eigenschaft des Systems hängt dieses Ergebnis zusammen?

4. Elektrischer Kondensator (25 P.)

Zwei konzentrische, gleichförmig geladene, unendlich dünne Kugelschalen mit Radien $R_1 < R_2$ besitzen die Gesamtladungen Q_1 und Q_2 .

- Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im ganzen Raum.
- Berechnen Sie die potentielle Energie V des Systems.
- Wie lauten das elektrische Feld und die potentielle Energie im Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$? Berechnen Sie in diesem Sonderfall das elektrostatische Potential Φ im ganzen Raum, sowie die Potentialdifferenz (elektrische Spannung!) $U \equiv \Phi(R_1) - \Phi(R_2)$ zwischen den zwei Kugelschalen.

5. Magnetisches Dipolmoment einer rotierenden geladenen Vollkugel (15 P.)

Eine homogen geladene Vollkugel (Radius R , Gesamtladung Q , Mittelpunkt der Kugel im Ursprungspunkt $\vec{r} = \vec{0}$) dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die z -Achse.

i. Ladungs- und Ladungsstromdichte

- Wie lautet die elektrische Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$?
- Wie lautet die Geschwindigkeit eines Punktes der Kugel, der sich im Punkt \vec{r} befindet? Folgern Sie daraus die elektrische Ladungsstromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r})$.

- Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$ der Kugel.

6. Elektrodynamik (24 P.)

i. Wissen

- Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen an.
- Wie lautet die Kontinuitätsgleichung? Welche Erhaltungsgröße liegt ihr zugrunde?
- Wie lassen sich die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} aus Potentialen Φ , \vec{A} ableiten?

- Wie lauten die Differentialgleichungen für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ in der Elektrostatik und für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ in der Magnetostatik und wie lauten die allgemeinen Lösungen für die beiden Felder? Was muss für $\vec{A}(\vec{r})$ noch beachtet werden?

Es können 128 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$