1. Zentralkraftproblem (22 P.)

i. (10 P.)

a) (4 P.) Damit die effektive potentielle Energie V_{eff} ein Minimum an der Stelle $r = r_0$ hat, soll die erste Ableitung dort verschwinden, und die zweite Ableitung positiv sein:

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \quad \text{und} \quad V''_{\text{eff}}(r_0) > 0. \tag{1}$$

Für die effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V_{\text{eff}}(r)$ bedeuten diese Bedingungen, dass $\vec{F}_{\text{eff}}$ für $|\vec{r}| = r_0$ verschwindet, und abstoßend bzw. anziehend für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sein soll.

b) (6 P.) Die Kraft $\vec{F}(r) = -(K/r^n)\,\vec{e}_r$ folgt für $n \neq 1$ aus der potentiellen Energie

$$V(r) = -\frac{K}{(n-1)r^{n-1}}. \tag{2}$$

[Für $n = 1$: $V(r) = K\ln(r/a)$ mit irgendeinem Abstand a vom Kraftzentrum.]

Mit dieser Form von V lautet die effektive potentielle Energie

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{K}{(n-1)r^{n-1}}.$$

mit den sukzessiven Ableitungen (auch gültig wenn $n = 1$)

$$V'_{\text{eff}}(r) = -\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{K}{r^n} \quad \text{und} \quad V''_{\text{eff}}(r) = \frac{3\ell^2}{mr^4} - \frac{nK}{r^{n+1}}.$$

Die erste Ableitung V'_{eff} verschwindet in r_0 definiert durch

$$r_0^{n-3} = \frac{mK}{\ell^2} \tag{3}$$

vorausgesetzt, K positiv ist, damit r_0 reell und positiv sein kann. Dann lautet die Bedingung $V''_{\text{eff}}(r_0) > 0$

$$\frac{3\ell^2}{mr_0^4} - \frac{nK}{r_0^{n+1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\ell^2}{m} - \frac{nK}{r_0^{n-3}} > 0.$$

Unter Nutzung von Gl. (3) wird dies zu

$$\frac{3\ell^2}{m} - \frac{n\ell^2}{m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < 3. \tag{4}$$

Das heißt, es gibt eine stabile Kreisbahn wenn $K > 0$ und $n < 3$.

ii. (12 P.)

a) (2 P.) Ausgehend von der Definition der effektiven potentiellen Energie V_{eff} kommt

$$\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{mr^3}\vec{e}_r - \vec{\nabla} V(r) = \frac{\ell^2}{mr^3}\vec{e}_r + \vec{F}(\vec{r}),$$

d.h. nach Projektion entlang $\vec{e}_r$: $F_{\text{eff}}(r) = \ell^2/mr^3 + F(r)$.

b) (10 P.) Sei r_0 ein Minimum von V_{eff}. Dann verschwindet die effektive Kraft für $|\vec{r}| = r_0$, d.h.

$$F_{\text{eff}}(r_0) = \frac{\ell^2}{mr_0^3} + F(r_0) = 0. \tag{5}$$

Betrachte man jetzt den Ansatz $r(t) = r_0 + \varrho(t)$ mit $|\varrho(t)| \ll r_0$, so wird das zweite newtonsche Gesetz $m\ddot{r}(t) = F_{\text{eff}}\big(r(t)\big)$ zu

$$m\ddot{\varrho}(t) = F_{\text{eff}}\big(r_0 + \varrho(t)\big) = \frac{\ell^2}{m[r_0 + \varrho(t)]^3} + F\big(r_0 + \varrho(t)\big). \tag{6}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man Taylor-Entwicklungen zur ersten Ordnung in ϱ durchführen:

$$\frac{\ell^2}{m(r_0 + \varrho)^3} = \frac{\ell^2}{mr_0^3(1 + \varrho/r_0)^3} \simeq \frac{\ell^2}{mr_0^3}\left(1 - 3\frac{\varrho}{r_0}\right) \quad \text{und} \quad F(r_0 + \varrho) \simeq F(r_0) + F'(r_0)\varrho.$$

Womit wird Gl. (6) unter Berücksichtigung von Gl. (5) zu

$$m\ddot{\varrho} = \frac{-3\ell^2}{mr_0^3}\frac{\varrho}{r_0} + F'(r_0)\varrho = 3F(r_0)\frac{\varrho}{r_0} + F'(r_0)\varrho.$$

Nach Division durch m ergibt sich schließlich

$$\ddot{\varrho} = -\left[\frac{3g(r_0)}{r_0} + g'(r_0)\right]\varrho \tag{7}$$

mit $g(r) \equiv -F(r)/m$. Wenn der Term in eckigen Klammern positiv ist, beschreibt diese Gleichung harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{3g(r_0)}{r_0} + g'(r_0)}. \tag{8}$$

Man prüft eigentlich schnell nach, dass im Fall von **i.b)** die Bedingung $3g(r_0)/r_0 + g'(r_0) > 0$ äquivalent zu $3 - n > 0$ d.h. $n < 3$ ist.

2. Zwei durch Seil verbundene Massen auf schiefen Ebenen (12 P.)

i. (4 P.) Insgesamt können zwei Punktmassen 6 Freiheitsgrade haben. Hier soll jede Punktmasse auf den schiefen Ebenen bleiben, entsprechend 2 Zwangsbedingungen. Dazu bleibt jede Masse in der Ebene $y = 0$, was 2 weitere Bedingungen darstellt. Schließlich ist sind die zwei Punktmassen durch ein Seil konstanter Länge verbunden, entsprechend einer fünften Zwangsbedingung. Insgesamt gibt es also nur $1 = 6 - 5$ Freiheitsgrad.

ii. (8 P.) Wir wählen ℓ_1 als verallgemeinerte Koordinate. Die kartesischen Koordinaten der Punktmassen lauten

$$(x_1 = -\ell_1\cos\alpha_1, y_1 = 0, z_1 = -\ell_1\sin\alpha_1) \quad \text{und} \quad (x_2 = \ell_2\cos\alpha_2, y_2 = 0, z_2 = -\ell_2\sin\alpha_2),$$

wobei ℓ_2 noch durch $\ell - \ell_1$ ersetzt werden kann. Daraus folgen die Geschwindigkeiten

$$(\dot{x}_1 = -\dot{\ell}_1\cos\alpha_1, \dot{y}_1 = 0, \dot{z}_1 = -\dot{\ell}_1\sin\alpha_1) \quad \text{und} \quad (\dot{x}_2 = -\dot{\ell}_1\cos\alpha_2, \dot{y}_2 = 0, \dot{z}_2 = \dot{\ell}_1\sin\alpha_2).$$

Dies liefert die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \cdots = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\ell}_1^2.$$

Zum anderen ist die potentielle Energie der Punktmassen im Gravitationsfeld

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = (m_2\sin\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1)g\ell_1 - m_2 g\ell\sin\alpha_2.$$

Damit lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\ell}_1^2 - (m_2\sin\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1)g\ell_1 + m_2 g\ell\sin\alpha_2, \tag{9}$$

wobei der letzte Term eine Konstante ist, die nicht zu den Bewegungsgleichung beiträgt (und daher weggelassen werden darf).

Die Euler–Lagrange-Bewegungsgleichung für diese Lagrange-Funktion ist

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ell_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\ell}_1} \quad \Leftrightarrow \quad (m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(m_1 + m_2)\dot{\ell}_1\big] = (m_1 + m_2)\ddot{\ell}_1,$$

d.h. noch

$$\ddot{\ell}_1 = \frac{m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2}{m_1 + m_2}g. \tag{10}$$

3. Punktmasse auf einem Paraboloid (30 P.)

i. Lagrange-Formalismus (16 P.)

a) (3 P.) Insgesamt kann ein Massenpunkt 3 (Translations-)Freiheitsgrade haben. Hier stellt die Bedingung, dass die Punktmasse auf dem Paraboloid $x^2 + y^2 = az$ bleibt, eine Zwangsbedingung dar, so dass es nur $2 = 3 - 1$ Freiheitsgrade gibt.

b) **(10 P.)** In einem kartesischen System lauten die Koordinaten der Punktmasse

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \frac{r^2}{a},$$

mit Polarkoordinaten (r, θ) in der (x, y)-Ebene. Dies liefert die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{z} = \frac{2r\dot{r}}{a}$$

und somit die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \cdots = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2.$$

Zum anderen ist die potentielle Energie im Gravitationsfeld

$$V = mgz = \frac{mgr^2}{a}.$$

Insgesamt lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{mgr^2}{a}. \tag{11}$$

Die entsprechenden Euler–Lagrange-Bewegungsgleichungen sind einerseits

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4mr\dot{r}^2}{a^2} + mr\dot{\theta}^2 - \frac{2mgr}{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}\right] = m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\ddot{r} + \frac{8mr\dot{r}^2}{a^2},$$

d.h. nach Umschreibung

$$\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\ddot{r} + \frac{4r}{a^2}\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 + \frac{2gr}{a} = 0 \tag{12a}$$

für die Radialkoordinate und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad\Leftrightarrow\quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \tag{12b}$$

für die Winkelkoordinate.

c) **(3 P.)** Sei $r_0 \equiv \sqrt{ah}$ der Radius des Kreises, der durch Schnitt des Paraboloids mit der Ebene $z = h$ entsteht. Das Einsetzen von $r(t) = r_0$ in die Bewegungsgleichung (12a) ergibt

$$r_0\dot{\theta}^2 = \frac{2gr_0}{a} \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\theta} = \pm\sqrt{2g/a}.$$

Eine Bahn mit dieser konstanten Winkelgeschwindigkeit und konstantem r, d.h. ein Kreis, ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen. Interessanterweise ist der passende Wert von $\dot{\theta}$ unabhängig vom Radius des Kreises.

ii. Hamilton-Formalismus (14 P.)

a) **(6 P.)** Aus der Lagrange-Funktion (11) folgen die verallgemeinerten Impulse, und zwar

$$p_r \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r} \quad \text{und} \quad p_\theta \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \tag{13}$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion des Systems

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} &= m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{mgr^2}{a}\\ &= \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)\dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mgr^2}{a},\end{aligned}$$

d.h. noch

$$\mathcal{H} = \frac{(p_r)^2}{2m(1+4r^2/a^2)} + \frac{(p_\theta)^2}{2mr^2} + \frac{mgr^2}{a}. \tag{14}$$

b) **(8 P.)** Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind dann

$$\dot{r} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m(1+4r^2/a^2)} \quad \text{und} \quad \dot{\theta} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \tag{15a}$$

äquivalent zu den Beziehungen (13), und

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \frac{8r(p_r)^2}{2ma^2(1+4r^2/a^2)^2} + \frac{(p_\theta)^2}{mr^3} - \frac{2mgr}{a} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = 0. \tag{15b}$$

Die Bewegungsgleichung für p_θ ist eine Erhaltungsgleichung — eigentlich ist p_θ der Betrag des Drehimpulses um die Achse des Kegels. Die Erhaltung dieses Drehimpulses folgt aus der Invarianz der Physik bzw. der Lagrange-Funktion des Systems unter Drehungen um diese Symmetrieachse des Systems (Noether-Theorem).

4. Elektrischer Kondensator **(25 P.)**

i. **(12 P.)** Sei O der Mittelpunkt der Kugel. Die Kugelsymmetrie des Problems legt nahe, Kugelkoordinaten mit dem Ursprungspunkt in O zu wählen. Wegen der Symmetrie erwartet man auch, dass der Betrag des elektrischen Felds in einem Punkt $\vec{r}$ nur vom Abstand $r \equiv |\vec{r}|$ des Punkts zu O abhängt, und das $\vec{E}(\vec{r})$ radial ist: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$.

Um $E(r)$ zu bestimmen, werden wir das Gaußsche Gesetz

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0} \tag{16}$$

verwenden, wobei $Q_{\mathcal{V}}$ die elektrische Ladung innerhalb des Volumens $\mathcal{V}$, abgegrenzt durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$, bezeichnet. Als „Gaußsches Volumen" betrachtet man eine Kugel mit Zentrum O und Radius a. Dann wird das Flächenintegral in Gl. (16) zu

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} E(a)\,\mathrm{d}^2\mathcal{S} = 4\pi a^2\, E(a),$$

wobei $4\pi a^2$ die Fläche der Kugel ist. Die Ladung innerhalb $\mathcal{V}$ hängt vom Radius der Gaußschen Kugel ab: $Q_{\mathcal{V}} = 0$ wenn $a < R_1$, $Q_{\mathcal{V}} = Q_1$ wenn $R_1 \le a < R_2$, und $Q_{\mathcal{V}} = Q_1 + Q_2$ wenn $a \ge R_2$. Insgesamt ergibt sich also

$$4\pi a^2\, E(a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a < R \\ Q_1 \text{ für } R_1 \le a < R_2 \\ Q_1 + Q_2 \text{ für } a \ge R_2 \end{cases}$$

d.h. schließlich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} \text{ für } r < R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \text{ für } R_1 \le r < R_2 \\ \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \text{ für } r \ge R_2. \end{cases} \tag{17}$$

Alternative Form (gefunden in einer Klausur): $\vec{E}(\vec{r}) = \left[\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta(r-R_1) + \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Theta(r-R_2)\right]\vec{e}_r.$

ii. **(6 P.)** Um nun die potentielle Energie zu bestimmen, kann man die Energiedichte $\epsilon_0\vec{E}^2/2$ über den ganzen Raum integrieren:

$$V \equiv \int \frac{\epsilon_0\vec{E}(\vec{r})^2}{2}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \int \frac{\epsilon_0 E(r)^2}{2}\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} \frac{(Q_1+Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r$$

d.h.

$$V = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(Q_1+Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}. \tag{18}$$

iii. **(7 P.)** Im Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ wird das elektrostatische Feld (17) zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} \text{ für } r < R_1 \text{ und } r \geq R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathrm{e}}_r \text{ für } R_1 \leq r < R_2, \end{cases} \tag{19}$$

d.h. nimmt er endliche Werte nur zwischen den zwei Kugelschalen. Wiederum vereinfacht sich die potentielle Energie (18):

$$V = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{20}$$

Aus Gl. (19) erhält man durch Integration das elektrostatische Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \Phi_1 \text{ für } r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \Phi_{12} \text{ für } R_1 \leq r < R_2 \\ \Phi_2 \text{ für } r > R_2 \end{cases}$$

mit drei Konstanten Φ_1, Φ_{12}, Φ_2. Wegen der Kontinuität des Potentials für $r = R_1$ und $r = R_2$ sind diese Konstanten nicht unabhängig: In $r = R_1$ gilt $\Phi_1 = Q/4\pi\epsilon_0 R_1 + \Phi_{12}$ und in $r = R_2$ gilt $\Phi_2 = Q/4\pi\epsilon_0 R_2 + \Phi_{12}$. Legt man zum Beispiel $\Phi_2 \equiv \Phi_\infty$ fest, so gilt insgesamt

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) + \Phi_\infty \text{ für } r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2}\right) + \Phi_\infty \text{ für } R_1 \leq r < R_2 \\ \Phi_\infty \text{ für } r > R_2. \end{cases} \tag{21}$$

Man sieht, dass die Potentialdifferenz zwischen den zwei Kugelschalen

$$U \equiv \Phi(R_1) - \Phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{22}$$

ist.
Die zwei Kugelschalen bilden einen Kondensator, dessen Kapazität durch $1/C = U/Q$ gegeben ist.

5. Magnetisches Dipolmoment einer rotierenden geladenen Vollkugel (15 P.)

i. Ladungs- und Ladungsstromdichte (7 P.)

a) **(4 P.)** Die elektrische Ladungsdichte ist der Form $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_0\Theta(R-r)$ mit einer Konstanten ρ_0 und der Heaviside-Funktion Θ. Um der Normierungsbedingung $\int \rho_{\text{el.}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = Q$ zu genügen, muss das Produkt aus ρ_0 und dem Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ der Kugel gleich der Gesamtladung Q sein. Daher gilt

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta(R-r). \tag{23}$$

b) **(3 P.)** Die instantane Geschwindigkeit eines Punktes der Kugel, der sich im Punkt $\vec{r}$ befindet, ist $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Multipliziert mit der lokalen Ladungsdichte liefert dies die Ladungsstromdichte:

$$\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}) = \rho_{\text{el.}}(\vec{r})\,\vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta(R-r)\,\vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{24}$$

ii. **(8 P.)** Mit der Ladungsstromdichte (24) lautet das magnetische Dipolmoment der rotierenden Kugel

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \frac{3Q}{8\pi R^3}\int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,\Theta(R-r)\,\mathrm{d}^3\vec{r}.$$

Im Integranden gilt $\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = |\vec{r}|^2\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}$. Unter Einführung von Kugelkoordinaten (r,θ,φ), mit θ dem Polarwinkel zwischen $\vec{r}$ und der z-Achse, ergibt sich

$$\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = r^2\vec{\omega} - r\omega\cos\theta\,\vec{r} = r^2\omega\,\vec{e}_z - r^2\omega\cos\theta\,(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z).$$

Daher gilt

$$\int \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\Theta(R-r)\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \int_0^R r^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\omega\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\\ -\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\\ 1-\cos^2\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r.$$

Wegen des Integrals über φ sind die x- und y-Komponenten Null und es bleibt

$$\int \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,\Theta(R-r)\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \omega\,\vec{e}_z\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \vec{\omega}\,\frac{R^5}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{8\pi R^5}{15}\vec{\omega}.$$

Mit dem Vorfaktor $3Q/8\pi R^3$ ist das magnetische Dipolmoment der rotierenden Kugel

$$\vec{\mu} = \frac{QR^2}{5}\vec{\omega}. \tag{25}$$

6. Elektrodynamik **(24 P.)**

i. Wissen (15 P.)

a) (8 P.) Die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen sind

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) \tag{26a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{26b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{26c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}), \tag{26d}$$

mit $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

b) (3 P.) Die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik lautet

$$\frac{\partial\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = 0. \tag{27}$$

Sie drückt die lokale Erhaltung der elektrischen Ladung aus.

c) (4 P.) Die Beziehungen zwischen elektromagnetischen Feldern und Potentialen lauten

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} \tag{28a}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r}). \tag{28b}$$

ii. (9 P.) In der Elektrostatik vereinfacht sich Gl. (28a) zu $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$. Nach Einsetzen in die Maxwell–Gauß-Gleichung (26a) ergibt sich die Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\triangle\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r})}{\epsilon_0}. \tag{29}$$

Wiederum liefert das Einsetzen der Beziehung (28b) in die stationäre Maxwell–Ampère-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})$ die Gleichung

$$\vec{\nabla}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})\big] - \triangle\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}).$$

In der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0$ — die man anhand einer Eichtransformation wählen kann — vereinfacht sich diese Gleichung zur Poisson-Gleichung der Magnetostatik

$$\triangle\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r}). \tag{30}$$

Die Lösungen (auf $\mathbb{R}^3$) dieser Poisson-Gleichungen, die im Unendlichen verschwinden, sind

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}\,' - \vec{r}|} \,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \quad \text{und} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0 \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}\,')}{4\pi |\vec{r}\,' - \vec{r}|} \,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{31}$$