Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Massenpunkt auf einem Kegel (40 P.)

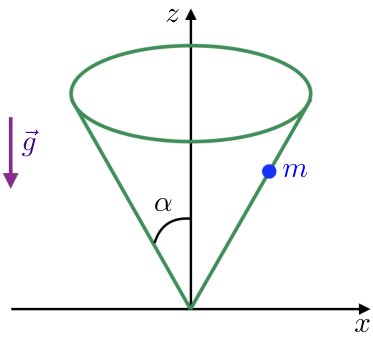
i. Vorbereitung

a) Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen? Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

b) Wie hängt die Hamilton-Funktion mit der Lagrange-Funktion zusammen? Wie lauten allgemein die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

ii. Lagrange-Formalismus

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei im Schwerefeld $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ auf einem Kreiskegel mit Öffnungswinkel α und Achse entlang der z-Richtung.



a) Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.

Hinweis: Benutzen Sie den Abstand r des Massenpunktes von der Kegelachse und einen geeigneten Winkel θ als verallgemeinerte Koordinaten.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

iii. Hamilton-Formalismus

a) Bestimmen Sie die zu (r, θ) kanonisch konjugierten Impulse (p_r, p_θ) und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch die Koordinaten und Impulse aus.

b) Geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an. Was ist die physikalische Bedeutung der Bewegungsgleichung für p_θ? Mit welcher Eigenschaft des Systems hängt dieses Ergebnis zusammen?

iv. Zu $t = 0$ ist die Geschwindigkeit des Massenpunkts horizontal. Beschreiben Sie qualitativ — ohne die Bewegungsgleichungen zu lösen — die Bewegung für $t > 0$ unter Berücksichtigung eines Ergebnisses aus **iii.b)**.

2. Regentropfen im Schwerefeld (25 P.)

In der mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre fällt ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius R, Masse m) unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ senkrecht nach unten. Auf ihn wirken die Schwerkraft und eine Reibungskraft

$$\vec{F}_\mathrm{R} \equiv -\gamma\, R^2\, \vec{v} \qquad \text{mit } \gamma > 0 \tag{1}$$

mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Tropfens. Sei $v \equiv |\vec{v}|$. Zur Anfangszeit $t = 0$ ruht der Wassertropfen: $v(0) = 0$.

i. Durch Kondensation wächst das Volumen des Tropfens proportional zu seiner Oberfläche an, so dass Radius und Masse des Tropfens zeitabhängig sind: $R(t)$, $m(t)$. Sei $R_0 \equiv R(0)$ der Radius zur Anfangszeit. Die Massendichte ρ von Wasser wird als konstant angenommen.

a) Zeigen Sie, dass der Tropfenradius linear mit der Zeit zunimmt: $R(t) = R_0 + \alpha t$, wobei α der Proportionalitätsfaktor zwischen der Rate der Volumenänderung und der Oberfläche ist.

b) Folgern Sie daraus die Rate $\dot{m}(t)$ der Massenänderung, die sich durch $m(t)$, $R(t)$ und α ausdrücken lässt.

ii. Bewegungsgleichung

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $v(t)$ auf. Welches physikalische Gesetz haben Sie dabei benutzt? (*Hinweis*: Die Masse des Tropfens ist zeitabhängig.)

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung in der Form

$$\dot{v}(t) + \frac{3\alpha}{R(t)} v(t) = g - \frac{\alpha\,\lambda}{R(t)} v(t) \tag{2}$$

umschreiben lässt. Dabei ist λ ein konstanter Faktor, der von α, γ und ρ abhängt.

c) Um die Bewegungsgleichung integrieren zu können, lohnt es sich, die Geschwindigkeit als Funktion vom Radius $v(R)$ zu betrachten. Drücken Sie zuerst $\dot{v}(t)$ durch die Ableitung $v'(R) \equiv \mathrm{d}v/\mathrm{d}R$ aus. Bestimmen Sie dann aus Gl. (2) die Differentialgleichung für $v(R)$. Geben Sie die Lösung dieser Gleichung an, die die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis: Bei der Lösung der Bewegungsgleichung für $v(R)$ können Sie die folgenden Ansätze machen: $v(R) \propto R^n$ für die Lösung der homogenen Gleichung, und $v(R) \propto R$ für die spezielle Lösung.

d) Schließlich können Sie aus der gefundenen Lösung $v(R)$ die Geschwindigkeit $v(t)$ bestimmen.

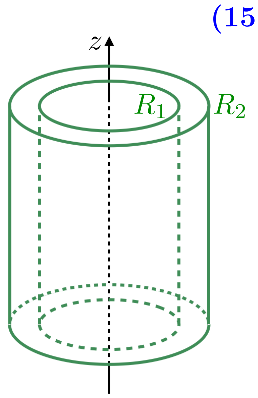
3. Elektrisch geladene Kugelschale (20 P.)

i. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ einer gleichförmig geladenen, unendlich dünnen ruhenden Kugelschale mit Gesamtladung Q und Radius R.

ii. Berechnen Sie die potentielle Energie V der Kugelschale.

4. Stromdurchflossener Hohlzylinder (15 P.)

Ein unendlich langer Hohlzylinder (Innenradius R_1, Außenradius R_2) wird homogen vom elektrischen Strom I durchflossen.



i. Geben Sie die elektrische Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})$ an.

Hinweis: $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(\vec{r})$ liegt entlang $\vec{e}_z$.

ii. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ mit dem Ampère-Gesetz im Innen- und Außenraum und im Zylindermantel. Skizzieren Sie den Verlauf von $|\vec{B}|$ als Funktion des Abstands von der Zylinderachse.

5. Elektromagnetische Potentiale (25 P.)

i. Wissen

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen an.

b) Wie lassen sich die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus Potentialen Φ, $\vec{A}$ ableiten? Wie lautet eine allgemeine Eichtransformation $(\Phi, \vec{A}) \to (\Phi', \vec{A}')$?

ii. Ein elektromagnetisches Feld wird über die folgenden Potentiale definiert:

$$\Phi(t,\vec{r}) \equiv \Phi_0 \sin(\omega t - kx) \qquad , \qquad \vec{A}(t,\vec{r}) \equiv \frac{\Phi_0}{c} \sin(\omega t - kx)\,\vec{e}_x, \tag{3}$$

mit $\omega = ck$.

a) Berechnen Sie die entsprechenden elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Erfüllen sie die Maxwell-Gleichungen? (Wenn ja: mit welchen Quellen?)

b) Die Felder aus **ii.a)** können anders hergeleitet werden. Können Sie eine „Eichfunktion" $\chi(t, \vec{r})$ finden, mit deren Hilfe sich das Skalarpotential Φ in $\Phi' = 0$ transformieren lässt? Wie lautet dann das transformierte Vektorpotential $\vec{A}'$?

Es können 125 Punkte erreicht werden.
Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$