

## VII.3 Multipolentwicklung

Eine oft auftretende Fragestellung ist die Bestimmung des Einflusses einer gegebenen elektrischen Ladungsverteilung  $\rho_{\text{el.}}$  mit typischer Ausdehnung  $R$  auf eine Punktladung — oder eine zweite Ladungsverteilung — in einem weit entfernten Punkt.

Wie wir schon gesehen haben, erzeugt die Ladungsverteilung das elektrische Skalarpotential in einem Punkt  $\vec{r}$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (\text{VII.12a})$$

wobei  $\mathcal{V}$  das durch die Verteilung besetzte Raumgebiet bezeichnet. Daraus lässt sich das elektrische Feld dann ableiten. Im Folgenden wird dieses Potential als eine Summe von sukzessiven Beiträgen geschrieben, die für  $|\vec{r}| \gg R$  immer kleiner werden. Diese sog. *Multipolentwicklung* wird erstens in kartesischen Koordinaten (§ VII.3.1) und dann in Kugelkoordinaten (§ VII.3.4) durchgeführt.

Um die Berechnungen zu vereinfachen wird hiernach angenommen, dass die Ladungsverteilung um den Ursprung des Bezugssystems sitzt, d.h.  $|\vec{r}'| \lesssim R$  für  $\vec{r}' \in \mathcal{V}$ . Dagegen soll der Punkt  $\vec{r}$  „weit entfernt“ sein, entsprechend  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg R$  für  $\vec{r}' \in \mathcal{V}$  oder äquivalent  $|\vec{r}| \gg R$ .

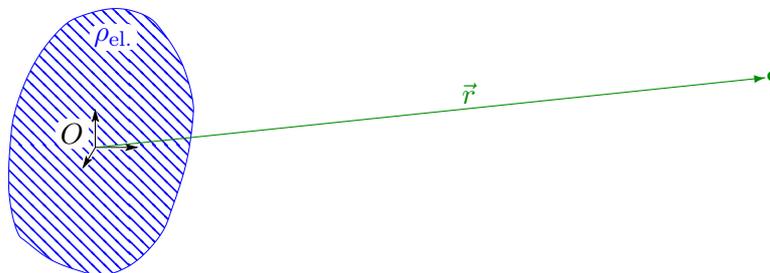


Abbildung VII.5

### VII.3.1 Kartesische Multipolmomente

Aus den Ungleichungen  $||\vec{r}| - |\vec{r}'|| \leq |\vec{r} - \vec{r}'| \leq |\vec{r}| + |\vec{r}'|$  und  $|\vec{r}'| \lesssim R \ll |\vec{r}|$  folgt, dass der Abstand  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  im Nenner des Integranden in Gl. (VII.12a) ungefähr gleich  $r \equiv |\vec{r}|$  ist. Dabei kann

die genaue Abweichung mithilfe einer Taylor-Entwicklung angenähert werden, wobei  $\vec{r}'$  die Rolle der „kleinen“ Verschiebung um den Bezugspunkt  $\vec{r}$  spielt.

Demgemäß lautet eine Taylor-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} + \sum_{i=1}^3 x'^i \frac{\partial}{\partial x'^i} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x'^i x'^j \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} + \dots,$$

wobei  $x^i$  bzw.  $x'^i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  die kartesischen Komponenten von  $\vec{r}$  bzw.  $\vec{r}'$  in einem Koordinatensystem bezeichnet. Dabei ist der erste Term auf der rechten Seite,  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  ausgewertet in  $\vec{r}' = \vec{0}$ , einfach  $1/r$ .

Dann folgt aus  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2}$  die erste Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{x^i - x'^i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

d.h. nach Auswertung in  $\vec{r}' = \vec{0}$

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} = \frac{x^i}{r^3}.$$

Eine zweite Ableitung unter Berücksichtigung der Produktregel gibt

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x'^i} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\delta^{ij}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{3(x^i - x'^i)(x^j - x'^j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5},$$

d.h.

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} = -\frac{\delta^{ij}}{r^3} + \frac{3x^i x^j}{r^5}.$$

Somit gilt insgesamt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r^3} x'^i + \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - \delta^{ij} r^2}{2r^5} x'^i x'^j + \dots \quad \text{für } |\vec{r}'| \ll r \equiv |\vec{r}|. \quad (\text{VII.25})$$

Die Kombination  $3x^i x^j - \delta^{ij} r^2$  ist *spurlos*, d.h. deren Multiplikation mit  $\delta^{ij}$  gefolgt von einer Summe über alle Werte  $i, j = 1, 2, 3$  ergibt Null.<sup>(65)</sup> Daher kann der quadratische Term in den  $x'^i$  gemäß

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - \delta^{ij} r^2}{2r^5} x'^i x'^j = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - \delta^{ij} r^2}{2r^5} \left( x'^i x'^j - \frac{\delta^{ij}}{3} |\vec{r}'|^2 \right)$$

erweitert werden. Dies führt zur Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r^3} x'^i + \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - \delta^{ij} r^2}{2r^5} \left( x'^i x'^j - \frac{\delta^{ij}}{3} |\vec{r}'|^2 \right) + \dots \quad (\text{VII.26})$$

Da die Komponente  $x^i$  bzw.  $x'^i$  typischerweise der Größenordnung  $\mathcal{O}(r)$  bzw.  $\mathcal{O}(R)$  ist, ist der erste Term der Ordnung (sogar gleich!)  $1/r$ , der zweite der Ordnung  $\mathcal{O}(R/r^2)$  und der dritte der Ordnung  $\mathcal{O}(R^2/r^3)$ . Somit ist jeder neue Term in der Entwicklung um einen Faktor der Ordnung  $R/r \ll 1$  kleiner als der vorige.

Nach Einsetzen der Gl. (VII.26) in den Ausdruck (VII.12a) des Skalarpotentials ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x^i x^j - \delta^{ij} r^2}{8\pi\epsilon_0 r^5} Q^{ij} + \dots, \quad (\text{VII.27a})$$

<sup>(65)</sup>Betrachtet man die Matrix  $\mathcal{A}$  mit Elementen  $a_{ij} \equiv 3x^i x^j - \delta^{ij} r^2$ , so ist die betrachtete Operation genau das Bilden der Spur  $\text{Tr } \mathcal{A} \equiv \sum_i a_{ii}$  der Matrix, daher die Bezeichnung.

wobei die ersten *kartesischen elektrischen Multipolmomente* durch

$$Q \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{VII.27b})$$

$$\vec{P} \equiv \int_{\mathcal{V}} \vec{r}' \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{VII.27c})$$

$$Q^{ij} \equiv \int_{\mathcal{V}} \left( x'^i x'^j - \frac{\delta^{ij}}{3} |\vec{r}'|^2 \right) \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{VII.27d})$$

definiert sind:  $Q$  ist die schon bekannte Gesamtladung. Dann heißt  $\vec{P}$  *elektrisches Dipolmoment* der Ladungsverteilung  $\rho_{\text{el.}}$ . Die Zahlen  $Q^{ij}$  — die *elektrischen Quadrupolmomente* — sind die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{Q}$ , des *elektrischen Quadrupoltensors*.

Man sieht sofort, dass der Quadrupoltensor symmetrisch — d.h.  $Q^{ij} = Q^{ji}$  für alle  $i, j$  — und spurlos — d.h.  $\sum_i Q^{ii} = 0$  — ist, wobei die letztere Eigenschaft schon beim Integranden auftritt. Demzufolge sind nur 5 der 9 Komponenten unabhängig.

### Bemerkungen:

\* Der erste Term im Skalarpotential (VII.27a) ist proportional zu  $1/r$ , der zweite proportional zu  $1/r^2$ , der dritte proportional zu (oder zumindest der Ordnung)  $1/r^3$ , usw. Somit tragen die niedrigeren Multipolmomente am meisten zu  $\Phi(\vec{r})$  bei. <sup>(66)</sup>

\* Das elektrische Dipolmoment bzw. Quadrupolmoment hat physikalische Dimension  $[\vec{P}] = \text{L T I}$  bzw.  $[Q^{ij}] = \text{L}^2 \text{T I}$ , entsprechend der SI-Einheit  $\text{C} \cdot \text{m}$  bzw.  $\text{C} \cdot \text{m}^2$ .

\* Im dritten Summanden der Multipolentwicklung (VII.27a) wird oft der Term  $-\delta^{ij} r^2$  im Zähler des Vorfaktors von  $Q^{ij}$  weggelassen: wegen der Spurlosigkeit von  $Q^{ij}$  ist der Beitrag dieses Terms in der Tat Null.

## VII.3.2 Beispiele von elektrischen Multipolmomenten

### VII.3.2a Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Ein einfaches Beispiel von Ladungsverteilung ist jenes einer Verteilung  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}')$ , die nur von  $|\vec{r}'|$  abhängt. Dementsprechend ist  $\rho_{\text{el.}}$  eine gerade Funktion von  $\vec{r}'$  — d.h.  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}') = \rho_{\text{el.}}(-\vec{r}')$  — bzw. von jeder der Komponenten  $x'^i$ .

Abhängig von der Form von  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}')$  wird sich über Gl. (VII.27b) eine bestimmte Gesamtladung  $Q$  ergeben, die ohne zusätzliche Information nicht präzisiert werden kann.

Bezüglich des Dipolmoments kann man bemerken, dass das Integrand  $\vec{r}' \rho_{\text{el.}}(\vec{r}')$  der definierenden Gleichung (VII.27c) jetzt eine ungerade Funktion von  $\vec{r}'$ , die über ein symmetrisches Gebiet integriert wird, woraus sich automatisch Null ergibt, unabhängig von der genauen funktionalen Form von  $\rho_{\text{el.}}$ .

Ein detaillierterer Beweis besteht in das Ersetzen von  $\vec{r}'$  durch  $-\vec{r}'$  im zweiten Integral von

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \left[ \int \vec{r}' \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' + \int \vec{r}' \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right].$$

Diese Substitution gibt dann genau das Negative des ersten Integrals, voraus  $\vec{P} = \vec{0}$  folgt.  $\square$

Mithilfe einer ähnlichen Argumentation findet man, dass die Quadrupolmomente  $Q^{ij}$  für  $i \neq j$  verschwinden. In der Tat lauten sie [Gl. (VII.27d)]

$$Q^{ij} = \int_{\mathcal{V}} x'^i x'^j \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad \text{für } i \neq j.$$

<sup>(66)</sup>... wenn sie nicht Null sind!

Dabei ist das Integrand eine ungerade Funktion von  $x^i$ , die über ein symmetrisches Intervall integriert wird, was zu  $Q^{ij} = 0$  führt. Somit ist  $Q^{ij}$  diagonal.

Schließlich sind die drei Koordinatenachsen wegen der angenommenen Kugelsymmetrie äquivalent, so dass  $Q^{11} = Q^{22} = Q^{33}$ . Da der Quadrupoltensor spurlos sein soll, ergibt sich  $Q^{ii} = 0$  für jedes  $i = 1, 2, 3$ , d.h. insgesamt  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ .

**Bemerkung:** Einige der obigen Ergebnisse lassen sich auch „geometrisch“ finden. Die angenommene Symmetrie bedeutet, dass keine Richtung bzw. kein Vektor von  $\mathbb{R}^3$  eine besondere Rolle spielt, sondern dass sie alle äquivalent sind. Dementsprechend gibt es keine bevorzugte Richtung für das Dipolmoment  $\vec{P}$ , das deshalb verschwinden muss. Auf ähnlicher Weise darf der Tensor  $\mathbf{Q}$  keine eindeutig (bis auf einen multiplikativen Faktor) definierte Eigenvektoren haben, sondern müssen alle Vektoren von  $\mathbb{R}^3$  Eigenvektoren sein: somit muss  $\mathbf{Q}$  proportional zur Identität sein, d.h.  $Q^{ij} \propto \delta^{ij}$ . Dann liefert die Spurlosigkeit den Proportionalitätsfaktor.

Da kugelsymmetrische Ladungsverteilungen keine elektrische Dipol- oder Quadrupolmomente haben — und eigentlich auch keine höhere Momente —, kann man reziprok folgern, dass solche Multipolmomente Abweichungen von der Kugelsymmetrie signalisieren.

### VII.3.2 b Einfacher Dipol

Der einfachste mögliche elektrische Dipol besteht aus zwei um einen Abstandsvektor  $\vec{a}$  getrennten Punktladungen  $q$  und  $-q$ .

Bezeichnet man mit  $\vec{r}_0$  den Ortsvektor des Mittelpunkts, so lautet die zugehörige Ladungsdichte

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}') = q\delta^{(3)}\left(\vec{r}' - \vec{r}_0 - \frac{\vec{a}}{2}\right) - q\delta^{(3)}\left(\vec{r}' - \vec{r}_0 + \frac{\vec{a}}{2}\right).$$



Abbildung VII.6

Eingesetzt in die Gl. (VII.27b)–(VII.27d) führt diese Verteilung zur Gesamtladung  $Q = 0$ , zum elektrischen Dipolmoment

$$\vec{P} = q\vec{a} \quad (\text{VII.28})$$

und zu einem verschwindenden Quadrupoltensor  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ .

### VII.3.2 c Beispiel eines Quadrupols

Ein einfaches Beispiel von einer Ladungsverteilung mit nicht-trivialem elektrischem Quadrupoltensor besteht aus zwei Punktladungen  $q$  in den Punkten  $\vec{r}_0 \pm \vec{a}$  und einer dritten Punktladung  $-2q$  im Mittelpunkt  $\vec{r}_0$ . Die zugehörige Ladungsdichte ist

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}') = q\left[\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 - \vec{a}) + \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 + \vec{a}) - 2\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0)\right],$$

was sofort  $Q = 0$  und  $\vec{P} = \vec{0}$  für die ersten zwei Multipolmomente ergibt.

Die  $x^3$ -Achse sei entlang  $\vec{a}$ .

Die Ladungsdichte ist eine gerade Funktion von  $x'^1$  und  $x'^2$ . Wenn  $i \neq j$  mit  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  muss entweder  $i$  oder  $j$  gleich 1 oder 2 sein, z.B.  $i = 1$ : dann ist das Integrand  $x'^1 x'^j \rho_{\text{el.}}(\vec{r}')$  von  $Q^{1j}$  ungerade in  $x'^1$ , was nach Integration über  $\mathbb{R}$  das Quadrupolmoment  $Q^{1j} = 0$  ergibt.

Wegen der Symmetrie um die  $x^3$ -Achse sind die  $x^1$ - und  $x^2$ -Richtungen äquivalent, so dass  $Q^{11} = Q^{22}$ . Aus der Spurlosigkeit von  $\mathbf{Q}$  folgt dann

$$Q^{11} = Q^{22} = -\frac{Q^{33}}{2}.$$

Schließlich kann man  $Q^{33}$  direkt berechnen:

$$Q^{33} = \int \left[ (x'^3)^2 - \frac{1}{3} |\vec{r}'|^2 \right] \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \int \left[ \frac{2(x'^3)^2}{3} - \frac{(x'^1)^2 + (x'^2)^2}{3} \right] \rho_{\text{el.}}(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$



Abbildung VII.7

und nach Einsetzen der Ladungsdichte kommt

$$Q^{33} = \frac{2}{3} \left[ q(x_0^3 - a)^2 + q(x_0^3 + a)^2 - 2q(x_0^3)^2 \right] = \frac{4}{3}qa^2$$

wobei  $x_0^3$  die relevante Komponente von  $\vec{r}_0$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Eine andere geometrische Anordnung, die zu einem nicht-verschwindenden Quadrupol-tensor bei  $Q = 0$  und  $\vec{P} = \vec{0}$  führt, besteht aus 4 Punktladungen  $q, -q, q, -q$  an den Ecken eines Quadrats. In diesem Fall ist  $\mathbf{Q}$  aber nicht diagonal.

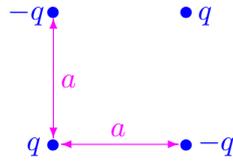


Abbildung VII.8