VII.2 Bestimmung des Skalarpotentials aus der Poisson-Gleichung

Im § VII.1.3 wurde das durch eine Ladungsverteilung erzeugte elektrostatische Potential (VII.12a) mithilfe des Gaußschen Gesetzes hergeleitet. Eine alternative Vorgehensweise zur Bestimmung von $\Phi(\vec{r})$ besteht darin, die Poisson-Gleichung

$$\triangle\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_{\text{el.}}(\vec{r})}{\epsilon_0} \qquad \text{(VII.4)}$$

direkt zu lösen. In diesem Abschnitt werden einige allgemeiner[60] mathematischen Rezepte und Ergebnisse zur Lösung dieser Differentialgleichung vorgestellt.

VII.2.1 Greensche Funktionen

Die Poisson-Gleichung (VII.4) ist ein Beispiel von (inhomogener) linearer partieller Differentialgleichung, hier zweiter Ordnung. Zur Lösung solcher Differentialgleichungen kann man sich die Linearität zu Nutze machen und ein Superpositionsprinzip verwenden. Somit wird die Differentialgleichung erstens mit einer Dirac-Distribution im rechten Glied gelöst. Da jede beliebige Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}$ als Superposition von solchen Distributionen

$$\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \int \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \qquad \text{(VII.18)}$$

geschrieben werden kann, ergibt sich eine Lösung der ursprünglichen linearen Differentialgleichung.

Definition: Eine Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ zweier vektoriellen Variablen $\vec{r},\vec{r}\,'$ heißt *Greensche*[ae] *Funktion* zur Poisson-Gleichung, wenn sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\triangle_{\vec{r}}G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{(VII.19)}$$

ist, wobei $\triangle_{\vec{r}}$ den Laplace-Operator bezüglich der Variablen $\vec{r}$ bezeichnet.

Aus einer solchen Lösung der Gl. (VII.19) folgt eine Lösung der Poisson-Gleichung (VII.4) mit fast jedem beliebigen rechten Glied, und zwar

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-1}{\epsilon_0}\int G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,', \qquad \text{(VII.20)}$$

unter der offensichtlichen Beschränkung, dass das Integral existieren soll.

Wendet man nämlich den Laplace-Operator $\triangle_{\vec{r}}$ auf das so definierte Potential an, so kann er wegen dessen Linearität in das Integral über $\vec{r}\,'$ eingezogen werden:

$$\triangle_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}) = \frac{-1}{\epsilon_0}\int \big[\triangle_{\vec{r}}G(\vec{r},\vec{r}\,')\big]\,\rho_{\text{el.}}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,',$$

Unter Verwendung der definierenden Gleichung (VII.19) wird das Integral zur Faltung von der $\delta^{(3)}$-Distribution mit der Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}$, Gl. (VII.18), so dass sich die rechte Seite zu $-\rho_{\text{el.}}(\vec{r})/\epsilon_0$ vereinfacht. □

Bemerkung: Im Beweis wurde die spezifische Form des Laplace-Operators nirgendwo benutzt, nur seine Linearität. Somit können allgemeiner Greensche Funktionen auch für andere lineare Differentialoperatoren, d.h. andere lineare Differentialgleichungen — egal, ob sie partiell oder gewöhnlich sind — eingeführt werden. Eine solche Greensche Funktion stellt die „Antwort“ zu einer durch eine δ-Distribution modellierten lokalisierten „Anregung“ dar.

[60] Das heißt, dass sie auch auf andere Differentialgleichungen anwendbar sind.

[ae] G. Green, 1793–1841

VII.2.2 Lösung der Poisson-Gleichung auf $\mathbb{R}^3$

Die Poisson- (VII.4) und Laplace-Gleichung (VII.5) wurden durch Mathematiker aufwändig untersucht, woraus eine Menge Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösungen resultiert. In diesem und im nächsten Paragraphen werden einige dieser Ergebnisse kurz dargestellt.

Betrachte man zuerst die Poisson-Gleichung, und daher die assoziierte partielle Differentialgleichung (VII.19), auf dem ganzen dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Dann lautet eine Greensche Funktion zur Poisson-Gleichung

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{VII.21}$$

Beweis: Sei $\vec{R} \equiv \vec{r}-\vec{r}\,'$ und $R \equiv |\vec{R}|$; dank der Kettenregel gilt $\triangle_{\vec{r}} = \triangle_{\vec{R}}$. Da die Funktion (VII.21) einen Pol für $\vec{r}=\vec{r}\,'$ bzw. $\vec{R}=\vec{0}$ hat, wird zuerst eine „regularisierte“ Version

$$G_\varepsilon(\vec{R}) \equiv \frac{-1}{4\pi\sqrt{R^2+\varepsilon^2}}$$

ohne Divergenz im Ursprungspunkt eingeführt. Dabei ist $\varepsilon > 0$ ein reeller Parameter: am Ende der Berechnung wird der Limes $\varepsilon \to 0$ genommen. Die Funktion G_ε hängt nur vom Betrag R ab, so dass sie im Raum der Variablen $\vec{R}$ kugelsymmetrisch um den Nullpunkt ist. Demzufolge ist es interessant, mit Kugelkoordinaten $(R,\theta_{\vec{R}},\varphi_{\vec{R}})$ zu arbeiten: dann ist das Problem unabhängig von den zwei Winkeln $\theta_{\vec{R}},\varphi_{\vec{R}}$. Daher vereinfacht sich der Laplace-Operator $\triangle_{\vec{R}}$ zu

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}$$

ohne winkelabhängigen Anteil. Wendet man diesen Operator auf G_ε an, so ergibt sich nach einfachen Ableitungen

$$\triangle_{\vec{R}} G_\varepsilon(\vec{R}) = \frac{3\varepsilon^2}{4\pi}\frac{1}{(R^2+\varepsilon^2)^{5/2}}.$$

Die Funktion im rechten Glied sei mit $\delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R})$ bezeichnet. Für festes ε besitzt $\delta_\varepsilon^{(3)}$ die folgenden Eigenschaften:

- $|\delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R})| \leq \dfrac{3\varepsilon^2}{4\pi R^5}$ für $\vec{R} \neq \vec{0}$;
- $|\delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{0})| = \dfrac{3}{4\pi|\varepsilon|}$;
- sei $a > 0$; dann gilt $\displaystyle\int_{|\vec{R}|\leq a} \delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R})\,\mathrm{d}^3\vec{R} = \int_0^a \delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R})\,4\pi R^2\,\mathrm{d}R = \int_0^a \frac{3R^2\varepsilon^2}{(R^2+\varepsilon^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}R$, d.h.

$$\int_{|\vec{R}|\leq a} \delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R})\,\mathrm{d}^3\vec{R} = \left[\frac{R^3}{(R^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\right]_0^a = \frac{a^3}{(a^2+\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Betrachte man jetzt den Grenzwert $\varepsilon \to 0$. Laut der ersten Eigenschaft gilt in diesem Limes $\lim \delta_\varepsilon^{(3)}(\vec{R}) = 0$ für $\vec{R} \neq \vec{0}$. Somit wird der Peak bei $\vec{R} = \vec{0}$ (zweite Eigenschaft) unendlich schmal und hoch. Schließlich geht das Integral von $\delta_\varepsilon^{(3)}$ über eine Kugel mit Radius a gegen 1, unabhängig von der Wahl von a. Diese Eigenschaften zeigen, dass $\delta_\varepsilon^{(3)}$ eine Darstellung der dreidimensionalen δ-Distribution ist, entsprechend dem nachzuprüfenden Ergebnis.[61] □

Setzt man jetzt die Greensche Funktion (VII.21) in die Beziehung (VII.20) ein, so ergibt sich genau das elektrostatische Skalarpotential (VII.12a)

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_{\mathrm{el.}}(\vec{r}\,')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'. \tag{VII.22}$$

Dabei wird die vorsichtige Beschränkung des § VII.1.3 c auf Punkte $\vec{r}$, die nicht zum durch die Ladungsverteilung besetzten Raumvolumen $\mathcal{V}$ gehören, jetzt automatisch aufgehoben.

[61] Die Funktion (VII.21) kann auch direkt gefunden werden, indem die definierende Differentialgleichung (VII.19) im Fourier-Raum aufgestellt wird.

Ein Problem bei der Konstruktion des elektrischen Potentials aus der Poisson-Gleichung besteht darin, dass die Funktion (VII.21) nicht die einzige Greensche Funktion zur Poisson-Gleichung auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Betrachtet man nämlich eine Lösung F der Laplace-Gleichung — eine harmonische Funktion — auf $\mathbb{R}^3$, so ist $G_2(\vec{r}, \vec{r}\,') \equiv G(\vec{r}, \vec{r}\,') + F(\vec{r} - \vec{r}\,')$ auch eine mögliche Greensche Funktion.

In der Tat gilt $\triangle_{\vec{r}} G_2(\vec{r}, \vec{r}\,') = \triangle_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}\,') + \triangle_{\vec{r}} F(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,') + 0.$ □

Da es unendlich viele harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ gibt, beispielsweise jede lineare Funktion der Form $F(\vec{r}) = ax^1 + bx^2 + cx^3$, gibt es auch unendlich viele Greensche Funktionen.

Unter den Greenschen Funktionen zur Poisson-Gleichung besitzt aber die Funktion (VII.21) eine einzigartige Eigenschaft: sie wird Null im Unendlichen $|\vec{r} - \vec{r}\,'| \to \infty$. Dementsprechend verschwindet das Potential (VII.22) weit von der Ladungsverteilung (wenn die letztere nur ein endliches Raumgebiet besetzt).

Genauer kann man zeigen, dass die einzigen harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ — und allgemeiner auf $\mathbb{R}^n$ für jede $n \in \mathbb{N}^*$ —, die überall endlich bleiben, die identisch konstanten Funktionen sind.

Bemerkung: Addiert man zur Funktion (VII.21) eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, so unterscheidet sich das aus Gl. (VII.20) resultierende Potential von dem Wert (VII.22) um eine additive Konstante — das Produkt aus K und der Gesamtladung der Verteilung geteilt durch ϵ_0 —, die nichts am elektrischen Feld ändert.

VII.2.3 Lösung der Poisson-Gleichung auf einem endlichen Gebiet von $\mathbb{R}^3$

VII.2.3 a Mathematische Fragestellung und Ergebnisse

Anstatt einer Lösung der Poisson-Gleichung auf dem ganzen Raum kann man auch eine Lösung auf einem endlichen Gebiet $\mathcal{V}$ von $\mathbb{R}^3$ suchen — entsprechend z.B. dem elektrostatischen Potential in einem leeren Hohlraum im Inneren von Materie. Ist die letztere irgendein Metall, in welchem frei bewegliche elektrische Ladungsträger vorhanden sind, so können sich solche Ladungen möglicherweise auf der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ des Bereichs $\mathcal{V}$ befinden: dann dienen diese Ladungen als Quellen für das elektrische Skalarpotential im Hohlraum.

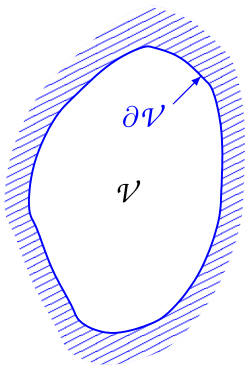

Abbildung VII.1

Meistens wird die entsprechende (Oberflächen)Ladungsdichte nicht explizit präzisiert. Stattdessen werden in der mathematischen Formulierung *Randbedingungen* für das festzustellende Potential $\Phi(\vec{r})$ vorgegeben, entsprechend seinem Verhalten auf der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$, das physikalisch „von außen“ gesteuert wird. Dazu wird oft angenommen, dass im Hohlraum Vakuum herrscht, so dass sich die Poisson-Gleichung auf die Laplace-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{r}) = 0$ vereinfacht. Bei der Fragestellung handelt es sich dann um ein sog. *Randwertproblem*.

Ein solches mathematisches Randwertproblem ist für physikalische Anwendungen nur dann nützlich, wenn es *wohlgestellt* ist. Dies bedeutet, dass das Problem eine Lösung hat, die eindeutig ist — möglicherweise bis auf eine additive Konstante — und stetig von den vorgegebenen Randbedingungen abhängt. Bei der Poisson-Gleichung ist es insbesondere der Fall für zwei einfache Arten von Randbedingungen:

- bei *Dirichlet*[af]*-Randbedingungen* (oder *Randbedingungen erster Art*) werden die Werte des Potentials $\Phi(\vec{r})$ — oder allgemeiner der zu bestimmenden Funktion — an der Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ vorgeschrieben;

- bei *Neumann*[ag]*-Randbedingungen* (oder *Randbedingungen zweiter Art*) wird die Normalenableitung $\partial_n\Phi(\vec{r})$ vorgegeben, wobei die letztere die Änderungsrate in der Richtung senkrecht zur Oberfläche ist. Diese Ableitung lässt sich auch als $\vec{e}_n(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ schreiben, wobei $\vec{e}_n(\vec{r})$ den Normaleinheitsvektor zur Oberfläche im Punkt $\vec{r}\in\partial\mathcal{V}$ bezeichnet.

  Stimmt die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ lokal mit der (x^1,x^2)-Ebene überein, so ist der lokale Normaleinheitsvektor $\vec{e}_3$, d.h. $\vec{e}_n\cdot\vec{\nabla}\Phi$ ist gleich $\partial\Phi/\partial x^3$, was auch mit $\partial_3\Phi$ bezeichnet wird.

Bemerkung: Im Fall von Neumann-Bedingungen ist die Vorschrift von $\partial_n\Phi(\vec{r})$ auf $\partial\mathcal{V}$ äquivalent zur Angabe der normalen Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ in jedem Punkt der Oberfläche. Allgemeiner werden die (physikalischen!) Randbedingungen der Elektrostatik im § VII.2.3 c diskutiert.

Die Existenz einer Lösung der Poisson-Gleichung auf $\mathcal{V}$ und ihre stetige Abhängigkeit von den Randbedingungen sind im allgemeinen Fall nicht trivial zu zeigen. Dagegen ist der Beweis der Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante ziemlich einfach.

Dieser Beweis macht die sog. *erste Greensche Identität*

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}f_2(\vec{r})+f_1(\vec{r})\triangle f_2(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3\vec{r}=\oint_{\partial\mathcal{V}}f_1(\vec{r})\,\partial_n f_2(\vec{r})\,\mathrm{d}^2\mathcal{S} \tag{VII.23}$$

zu Nutze, die für zwei (zweimal differenzierbare) reellwertige Funktionen f_1, f_2 gilt.

Beweis: Die Produktregel gibt $\vec{\nabla}\cdot(f_1\vec{\nabla}f_2)=\vec{\nabla}f_1\cdot\vec{\nabla}f_2+f_1\triangle f_2$, d.h. nach Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\vec{\nabla}f_1\cdot\vec{\nabla}f_2+f_1\triangle f_2\right]\mathrm{d}^3\vec{r}=\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}\cdot(f_1\vec{\nabla}f_2)\,\mathrm{d}^3\vec{r}=\oint_{\partial\mathcal{V}}f_1\vec{\nabla}f_2\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}}.$$

Dabei ist das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{\mathcal{S}}$ gleich $\mathrm{d}^2\mathcal{S}\,\vec{e}_n$, woraus die Identität folgt. □

Sind Φ_1, Φ_2 nämlich zwei Lösungen der Poisson-Gleichung auf $\mathcal{V}$ mit beliebiger (aber gleicher!) Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}$ auf der rechten Seite und gegebenen Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen, dann ist ihre Differenz $U\equiv\Phi_2-\Phi_1$ eine Lösung der Laplace-Gleichung $\triangle U(\vec{r})=0$ für $\vec{r}\in\mathcal{V}$, mit verschwindenden Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen $U(\vec{r})=0$ bzw. $\partial_n U(\vec{r})=0$ für $\vec{r}\in\partial\mathcal{V}$. Die erste Greensche Identität mit $f_1=f_2=U$ lautet dann

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\vec{\nabla}U(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}U(\vec{r})+U(\vec{r})\triangle U(\vec{r})\right]\mathrm{d}^3\vec{r}=\oint_{\partial\mathcal{V}}U(\vec{r})\,\partial_n U(\vec{r})\,\mathrm{d}^2\mathcal{S}.$$

Das Integrand auf der rechten Seite, und daher das Integral, verschwindet wegen der Randbedingungen. Wiederum ist der zweite Term in den eckigen Klammern auf der linken Seite ebenfalls Null, denn U erfüllt die Laplace-Gleichung. Deshalb bleibt nur

$$\int_{\mathcal{V}}\left[\vec{\nabla}U(\vec{r})\right]^2\mathrm{d}^3\vec{r}=0$$

[af] P. G. Lejeune Dirichlet, 1805–1859 [ag] C. Neumann, 1832–1925

übrig, was nur dann möglich ist, wenn $\vec{\nabla}U(\vec{r})$ identisch auf $\mathcal{V}$ verschwindet, d.h. wenn $U(\vec{r})$ konstant auf $\mathcal{V}$ ist: $U(\vec{r}) = K$, mit $K = 0$ falls Dirichlet-Bedingungen vorgegeben sind. Somit unterscheiden sich Φ_1 und Φ_2 nur um eine additive Konstante.

VII.2.3 b Physikalische Anwendungen

Faraday Käfig

Als erste Anwendung der obigen mathematischen Ergebnisse kann man das elektrische Feld in einem leeren Hohlraum innerhalb einer metallischen Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ bestimmen.

Da $\partial\mathcal{V}$ metallisch ist, können sich darauf freie Ladungsträger befinden. Im statischen Fall dürfen sich diese Ladungen definitionsgemäß nicht bewegen. Demzufolge darf kein elektrisches Feld in der Metallfläche vorhanden sein, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$ auf $\partial\mathcal{V}$ — sonst würde das elektrische Feld zur Entstehung einer Stromdichte führen. Daher ist das Skalarpotential Φ konstant auf der Oberfläche: $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$ für $\vec{r} \in \partial\mathcal{V}$. Dies stellt eine Dirichlet-Randbedingung für das elektrostatische Potential im Hohlraum dar.

In $\mathcal{V}$ soll Φ wegen der Abwesenheit von Ladungen Lösung der Laplace-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{r}) = 0$ sein. Eine Lösung, die auch die Randbedingung erfüllt, ist einfach die konstante Funktion $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$ für $\vec{r} \in \mathcal{V}$. Wegen der Eindeutigkeit ist dies in der Tat die einzige Lösung. Daraus folgt dann $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$ im Hohlraum, der als *Faraday-Käfig* bezeichnet wird.

Spiegelladungsmethode

Basierend auf der Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung für vorgegebene Dirichlet-Randbedingungen lässt sich eine andere Methode zur Lösung der Poisson-Gleichung in einem Gebiet von $\mathbb{R}^3$ formulieren.

Sei ein zu lösendes Problem $\mathcal{P}_1$, bei dem eine Fläche $\partial\mathcal{V}$ ein Raumgebiet $\mathcal{V}$ abgrenzt, in dem Punktladungen gemäß einer Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a)$ verteilt sind, wobei $\vec{x}_a$ die Position der a-ten Punktladung bezeichnet. Als (Dirichlet)-Randbedingung wird angenommen, dass $\partial\mathcal{V}$ eine *Äquipotentialfläche* ist, d.h. $\Phi(\vec{r})$ ist konstant auf $\partial\mathcal{V}$.

Sei ein anderes Problem $\mathcal{P}_2$ *ohne Fläche* jedoch mit denselben Punktladungen $\{q_a\}$ an den gleichen Positionen $\{\vec{x}_a\}$ sowie zusätzlichen Ladungen — sog. „Spiegelladungen" — außerhalb $\mathcal{V}$. Wenn das (lösbare!) Problem $\mathcal{P}_2$ zu einem Potential Φ führt, wovon eine Äquipotentialfläche mit der Fläche $\partial\mathcal{V}$ des Problems $\mathcal{P}_1$ übereinstimmt, dann ist das Potential von $\mathcal{P}_2$ im Volumen $\mathcal{V}$ genau gleich dem gesuchten Potential von $\mathcal{P}_1$.

Als Beispiel dieser Methode kann man das folgende Problem ($\mathcal{P}_1$) betrachten: im Halbraum $x < 0$ befindet sich ein elektrischer Leiter, dessen Oberfläche bei $x = 0$ eine Äquipotentialfläche ist;[62] im Punkt $\vec{x}_q \equiv (a, 0, 0)$ außerhalb des Leiters sitzt eine Punktladung q.
Im Bereich $x > 0$ soll das Skalarpotential Lösung der Poisson-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{r}) = -q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_q)/\epsilon_0$ sein, mit der Randbedingung $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$ für $x = 0$.

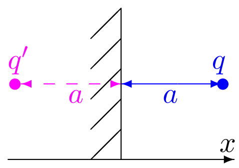

Abbildung VII.2

Ein passendes, einfach lösbares Problem $\mathcal{P}_2$ besteht aus zwei Punktladungen in einem sonst leeren Raum: q ist immer noch in $\vec{x}_q$, während eine zweite (Spiegel-)Punktladung q' im Punkt $-\vec{x}_q \equiv (-a, 0, 0)$ sitzt. Zusammen erzeugen diese Ladungen das Skalarpotential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{x}_q|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} + \vec{x}_q|},$$

das eine Lösung von $\triangle\Phi(\vec{r}) = \dfrac{-q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_q) - \dfrac{q'}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} + \vec{x}_q)$ im ganzen Raum darstellt.

[62] Dies ist immer der Fall bei elektrischen Leitern im Gleichgewicht, d.h. ohne Bewegung von Ladungen, wie schon bei der Beschreibung des Faraday-Käfigs argumentiert wurde.

Dieses Potential stellt auch eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{r}) = -q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_q)/\epsilon_0$ für $x \geq 0$ dar, die für $q' = -q$ konstant (und Null) bei $x = 0$ ist. Anders gesagt löst das Potential Φ das ursprüngliche Problem $\mathcal{P}_1$ für $x \geq 0$.