

ANHANG C

Die δ -Distribution

| | | |
|-------|---|-----|
| C.1 | Definition und erste Ergebnisse | 262 |
| C.1.1 | Definition | 262 |
| C.1.2 | Erste Eigenschaften | 263 |
| C.1.3 | Darstellungen der δ -Distribution | 263 |
| C.1.4 | Heaviside-Funktion | 265 |
| C.2 | Rechenregeln | 265 |
| C.2.1 | Skalierung | 266 |
| C.2.2 | Ableitung | 266 |
| C.2.3 | Substitution der Integrationsvariablen | 266 |
| C.3 | Mehrdimensionale δ -Distributionen | 267 |

Physiker verwenden in ihren Modellierungen oft punktförmige Objekte, wie Punktmassen oder Punktladungen. Zur Beschreibung solcher Objekte wurde die δ -Distribution eingeführt, die in diesem Anhang samt einiger ihrer Eigenschaften kurz dargestellt wird.

C.1 Definition und erste Ergebnisse

C.1.1 Definition

Definition: Als *Testfunktion* auf einem Raum Ω wird eine Funktion T bezeichnet, die einerseits glatt — d.h. beliebig oft differenzierbar — ist, und andererseits einen kompakten Träger besitzt — d.h. T verschwindet außerhalb eines beschränkten Gebiets von Ω .

Sei $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ der Raum der Testfunktionen auf Ω . In diesem und dem folgenden Abschnitt ist $\Omega = \mathbb{R}$, in Abschn. C.3 ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$.

Definition: Die δ -Distribution, auch *Dirac-Distribution* oder *Dirac- δ* genannt,⁽¹¹¹⁾ ist eine stetige lineare Abbildung auf $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, die einer Testfunktion T ihren Wert $T(0)$ zuordnet.

Um die Stetigkeit der δ -Distribution genauer diskutieren zu können, soll man einen Abstand auf dem Funktionenraum $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ einführen.

Für die Operation der δ -Distribution auf eine Testfunktion T existieren mehrere Notationen: Mathematiker schreiben entweder $\langle \delta, T \rangle = T(0)$ oder, selten, $\delta[T] = T(0)$. Physiker verwenden aber die Schreibweise

$$\int T(x)\delta(x) dx = T(0), \quad (\text{C.1})$$

wobei das Integrationszeichen ohne Grenzen eine Integration von $-\infty$ bis ∞ bedeuten soll. Diese Notation wird hiernach weiter motiviert, muss aber mit Vorbehalt genommen werden.

Insbesondere handelt es sich beim Integrationszeichen nicht um ein (Lebesgue-)Integral mit dem üblichen Integrationsmaß, wie bei der Integration von Funktionen.

⁽¹¹¹⁾oder noch, fehlerhaft, δ - bzw. Dirac-Funktion, da es sich nicht um eine „Funktion“ handelt.

Bemerkungen:

- * Die δ -Distribution ist ein Beispiel von *Distribution*(!), d.h. von einem stetigen linearen Funktional auf einem Raum von Testfunktionen, das den üblichen Begriff einer Funktion verallgemeinert — weshalb Distributionen auch als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet werden.
- * Die Beschränkung auf (Test)Funktionen mit einem kompakten Träger kann aufgehoben werden.
- * Die mithilfe einer δ -Distribution modellierten physikalischen Größen sind meistens Verteilungen, die als Gewicht in Integralen dienen, was eine erste Motivation die Schreibweise (C.1) gibt. Wichtig dabei ist, dass wenn die Variable x eine physikalische Dimension X hat, dann hat $\delta(x)$ die Dimension X^{-1} , so dass $\delta(x) dx$ dimensionslos ist.

C.1.2 Erste Eigenschaften

Definitionsgemäß ist die δ -Distribution linear: gegeben zwei beliebige Testfunktionen T_1, T_2 und zwei Zahlen λ_1, λ_2 , gilt erfüllt die Beziehung $\langle \delta, \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \rangle = \lambda_1 \langle \delta, T_1 \rangle + \lambda_2 \langle \delta, T_2 \rangle$, d.h. mit der Notation der Physiker

$$\int [\lambda_1 T_1(x) + \lambda_2 T_2(x)] \delta(x) dx = \lambda_1 \int T_1(x) \delta(x) dx + \lambda_2 \int T_2(x) \delta(x) dx. \quad (\text{C.2})$$

Schließlich ist dies noch gleich $\lambda_1 T_1(0) + \lambda_2 T_2(0)$. Diese Eigenschaft ist eine der Motivationen hinter der Schreibweise (C.1), denn sie gilt für das übliche Integral von Funktionen.

Unter Verwendung der Integralschreibweise sieht auch die folgende *Faltungseigenschaft* trivial aus. Sei $\xi \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$\int T(x) \delta(x - \xi) dx = T(\xi). \quad (\text{C.3})$$

Die unterliegende mathematische Konstruktion ist etwa aufwändig; dabei wird eine *translatierte δ -Distribution* $\delta_{(\xi)}$ definiert, die auf eine Testfunktion gemäß $\langle \delta_{(\xi)}, T \rangle = T(\xi)$ operiert. Dann gilt symbolisch $\langle \delta_{(\xi)}(x), T(x) \rangle \equiv \langle \delta(x), T(x + \xi) \rangle \equiv \langle \delta(x - \xi), T(x) \rangle$, wobei die letzte Gleichung als Definition von $\delta(x - \xi)$ zu betrachten ist.

Wird die „definierende“ Beziehung (C.1) auf $T(x) = e^{-ikx}$ angewandt — wobei es sich natürlich nicht um eine Testfunktion von $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ handelt —, so ergibt sich

$$\int e^{-ikx} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{C.4a})$$

Diese Gleichung sieht wie eine Formel für die Fourier-Transformation der δ -Distribution aus, und die entsprechende Rücktransformation lautet

$$\delta(x) = \int e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}. \quad (\text{C.4b})$$

Diese Formel stellt die sog. *Fourier-Darstellung* der δ -Distribution dar.

Wieder lassen sich diese Ergebnisse mathematisch korrekt begründen, indem die herkömmliche Fourier-Transformation auf Distributionen verallgemeinert wird.

C.1.3 Darstellungen der δ -Distribution

Die δ -Distribution lässt sich als Grenzwert einer Funktionenfolge darstellen, d.h. symbolisch

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x), \quad (\text{C.5a})$$

wobei δ_ε eine (integrierbare) Funktion im üblichen Sinn ist, die von einem reellen Parameter $\varepsilon > 0$ kontinuierlich abhängt. Dabei bedeutet der obige Grenzwert

$$\int f(x)\delta(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(x)\delta_\varepsilon(x) dx \quad (\text{C.5b})$$

für jede Funktion f mit bestimmten Eigenschaften — z.B. jede Testfunktion von $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.⁽¹¹²⁾ Dann bilden die Funktionen δ_ε eine *Darstellung der δ -Distribution*.

Da δ_ε eine Funktion ist, ist das Integral auf der rechten Seite von Gl. (C.5b) ein übliches (Lebesgue)-Integral. Somit wird das Verwenden der Integralnotation für die Operation auf f der δ -Distribution, auf der linken Seite von Gl. (C.5b), weiter motiviert.

Die Funktionen δ_ε werden oft so gewählt, dass sie die folgenden Eigenschaften haben:

- sie haben einen Peak bei $x = 0$, der mit abnehmendem ε schmaler und höher wird;
- für jeden $x \neq 0$ gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = 0$;
- $\int \delta_\varepsilon(x) dx = 1$.

Man prüft leicht nach, dass die hiernach angegebenen Beispiele diese Eigenschaften erfüllen.

C.1.3a Skalierte Rechteckfunktionen

Eine einfache Darstellung, jedoch durch unstetige Funktionen, ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{für } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

C.1.3b Skalierte Dreieckfunktionen

Eine stetige, aber nicht überall differenzierbare Darstellung, ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2} & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

C.1.3c Exponentialfunktionen

Ebenfalls nicht überall differenzierbar — diesmal liegt das Problem in $x = 0$ — ist die Darstellung durch Exponentialfunktionen

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon}. \quad (\text{C.8})$$

C.1.3d Gaußsche Verteilungen

Gaußsche Verteilungen liefern eine unendlich differenzierbare Darstellung:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\varepsilon^2}. \quad (\text{C.9})$$

C.1.3e Lorentz-Verteilungen

Mithilfe von Lorentz-Verteilungen ergibt sich die Darstellung:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - i\varepsilon}. \quad (\text{C.10})$$

⁽¹¹²⁾ Je nach der gewählten Klasse von Funktionen f können die Funktionen δ_ε eine passende Darstellung bilden oder nicht.

C.1.3f Kardinalsinus

Ebenfalls nützlich ist die Darstellung

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{\pi\varepsilon} & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

wobei die Definition des Zahlenwerts in $x = 0$ die Stetigkeit der Funktion δ_ε gewährleistet. Für $x \neq 0$ gilt nämlich

$$\delta_\varepsilon(x) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi},$$

und der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ gibt die Fourier-Darstellung (C.4b) wieder.

C.1.4 Heaviside-Funktion

Definition: Die *Heaviside-* oder *Stufenfunktion* wird durch

$$\Theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

definiert, wobei der Wert für $x = 0$ irrelevant ist.

Für diese Funktion kann man, genau wie für die δ -Distribution, Darstellungen Θ_ε finden, mit

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon(x) \quad (\text{C.13a})$$

oder genauer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Theta_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Theta(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (\text{C.13b})$$

für jede passende Funktion f , wobei die zweite Gleichung aus der Definition der Heaviside-Funktion folgt.

Dann liefert die Ableitung jeder differenzierbaren Darstellung Θ_ε der Heaviside-Funktion eine Darstellung δ_ε der δ -Distribution: symbolisch schreibt man $\Theta'_\varepsilon = \delta_\varepsilon$ oder noch

$$\Theta'(x) = \delta(x). \quad (\text{C.14})$$

Dabei handelt es sich um eine Ableitung „im Sinne der Distributionen“.

Beispiele von Darstellungen der Heaviside-Funktion sind

$$\Theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\varepsilon \\ \frac{x + \varepsilon}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{für } x > \varepsilon, \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

entsprechend der Darstellung (C.6) der δ -Distribution, oder

$$\Theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (\text{C.16})$$

deren Ableitung die Darstellung (C.10) der δ -Distribution wiedergibt.

C.2 Rechenregeln

Neben den schon in § C.1.2 angegebenen Eigenschaften gelten noch weitere, die hiernach meistens ohne expliziten Beweis⁽¹¹³⁾ aufgelistet werden.

⁽¹¹³⁾Die interessierte Leserin kann die verschiedenen Gleichungen relativ leicht prüfen, indem sie die δ -Distribution als Grenzwert einer Darstellung schreibt.

C.2.1 Skalierung

Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $a \in \mathbb{C}$); dann gilt eine Skalierungseigenschaft, die sich symbolisch als

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{C.17a})$$

schreiben lässt, was eigentlich

$$\int T(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} T(0), \quad (\text{C.17b})$$

für jede Testfunktion T bedeutet.

Für eine Darstellung δ_ε folgt die entsprechende Gleichung einfach aus einer Substitution der Integrationsvariablen.

Insbesondere gilt für $a = -1$

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{C.18})$$

d.h. die δ -Distribution ist gerade.

C.2.2 Ableitung

Man definiert eine Distribution δ' , die sich bezüglich der δ -Distribution wie die Ableitung f' bezüglich einer (Stamm)Funktion f verhält.

Dann gilt für jede Testfunktion T

$$\int T(x) \delta'(x) dx = -T'(0). \quad (\text{C.19})$$

Nimmt man die Integralschreibweise ernst und führt man eine partielle Integration durch, so ergibt sich

$$\int T(x) \delta'(x) dx = \left[T(x) \delta(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int T'(x) \delta(x) dx,$$

woraus das gesuchte Ergebnis „folgt“, denn T verschwindet im Unendlichen. \square

Auf ähnlicher Weise wird eine zweite Ableitung δ'' definiert, für die

$$\int T(x) \delta''(x) dx = T''(0) \quad (\text{C.20})$$

gilt, und so weiter für die höheren Ableitungen.

C.2.3 Substitution der Integrationsvariablen

Sei f eine differenzierbare reelle Funktion auf \mathbb{R} , mit einer einzigen Nullstelle in x_0 : $f(x_0) = 0$, wo ihre Ableitung nicht Null ist, $f'(x_0) \neq 0$. Dann gilt für die Verkettung von der δ -Distribution mit f

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (\text{C.21a})$$

entsprechend für jede Testfunktion T

$$\int T(x) \delta(f(x)) dx = \frac{1}{|f'(x_0)|} \int T(x) \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{|f'(x_0)|} T(x_0). \quad (\text{C.21b})$$

Dank den Annahmen über f gilt in der Nachbarschaft von x_0

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2) = f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2).$$

Das Ergebnis folgt dann aus der Skalierungseigenschaft (C.17). \square

Für eine Funktion f mit mehreren Nullstellen x_i , in denen die Ableitung f' nicht verschwindet, gilt die Verallgemeinerung

$$\delta(f(x)) = \sum_{\text{Nullstellen } x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i). \quad (\text{C.22})$$

Beispiel 1: Sei $f(x) = \arctan x$, mit einer einzigen Nullstelle in $x_0 = 0$, während die Ableitung $f'(x) = 1/(1+x^2)$ nirgendwo verschwindet. Da $f'(0) = 1$ lautet wird Gl. (C.21a) zu

$$\delta(\arctan x) = \delta(x).$$

Beispiel 2: Sei $f(x) = x^2 - a^2$ mit $a \in \mathbb{R}_+$; f hat zwei Nullstellen in $-a$ und a . Aus $f'(x) = 2x$ folgen $f'(-a) = -2a$, $f'(a) = 2a$, und somit $|f'(-a)| = |f'(a)| = 2a$. Somit ergibt Gl. (C.22)

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]. \quad (\text{C.23})$$

Bemerkungen:

* Falls eine Funktion f eine Nullstelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ hat, kann man die Funktion oft leicht „verformen“, um statt nur x_0 zwei (oder mehr) Nullstellen zu erhalten, in denen die Ableitung nicht verschwindet.

Beispielsweise würde man $\delta(x^2)$ durch $\delta(x^2 - \eta)$ ersetzen, den letzteren Ausdruck mithilfe der Gl. (C.23) umschreiben, die daraus folgenden Berechnungen durchführen, und schließlich den Limes $\eta \rightarrow 0$ betrachten... und hoffen, dass das Ergebnis sinnvoll ist!

* Wie in Gl. (C.22) implizit ist, darf man δ -Distributionen problemlos miteinander addieren. Mit Produkten von δ -Distributionen muss man aber vorsichtig sein: insbesondere ist das Produkt von $\delta(x)$ mit sich selbst nicht definiert. Dagegen dürfen δ -Distributionen von unterschiedlichen Argumenten, wie z.B. $\delta(x)\delta(y)$ oder $\delta(x)\delta(y-x)$, miteinander multipliziert werden. Dann muss aber über alle Argumente integriert werden, um eine Zahl zu erhalten, wie im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutiert wird.

C.3 Mehrdimensionale δ -Distributionen

Seien x^1, x^2, \dots, x^n unabhängige Variablen, die in einen n -dimensionalen Vektor \mathbf{x} zusammengefasst werden. Betrachtet man Testfunktionen $T(\mathbf{x})$ dieser n Variablen, so kann man eine n -dimensionale δ -Distribution, die oft mit $\delta^{(n)}$ bezeichnet wird,⁽¹¹⁴⁾ gemäß

$$\int T(\mathbf{x}) \delta^{(n)}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = T(\mathbf{0}), \quad (\text{C.24})$$

wobei das Integral über \mathbb{R}^n ist. Anders gesagt gilt

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) \equiv \delta(x^1) \cdots \delta(x^n) = \prod_{k=1}^n \delta(x^k). \quad (\text{C.25})$$

Die für die eindimensionale δ -Distribution angegebenen Eigenschaften lassen sich einfach auf $\delta^{(n)}$ verallgemeinern. Beispielsweise gelten die Faltungseigenschaft

$$\int T(\mathbf{x}) \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d^n \mathbf{x} = T(\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{C.26})$$

⁽¹¹⁴⁾ Dies sollte man nicht mit der n -ten Ableitung von der eindimensionalen δ -Distribution verwechseln — in der Physik treten höhere Ableitungen von δ aber extrem selten.

wobei $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, sowie die Fourier-Darstellung

$$\delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \int e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \frac{d^n \boldsymbol{k}}{(2\pi)^n} \quad (\text{C.27})$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = k^1 x^1 + \dots + k^n x^n$.

Die Skalierungseigenschaft lautet jetzt

$$\delta^{(n)}(a\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|a|^n} \delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \quad (\text{C.28})$$

für $a \in \mathbb{R}$, und kann erweitert werden: wenn \mathcal{A} eine invertierbare $n \times n$ -Matrix ist, dann ist

$$\delta^{(n)}(\mathcal{A}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\det \mathcal{A}|} \delta^{(n)}(\boldsymbol{x}). \quad (\text{C.29})$$

Ähnlich gilt im Fall einer Variablenänderung $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$ bzw. $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$

$$\delta^{(n)}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\det J|} \delta^{(n)}(\boldsymbol{x}) \quad (\text{C.30})$$

mit J der Jacobi-Matrix der Substitution, mit Elementen $\partial y^i / \partial x^j$. Aus dieser letzten Gleichung lässt sich die Verallgemeinerung der Formel (C.22) ableiten.

Literatur zum Anhang C

- Gelfand & Shilov, *Verallgemeinerte Funktionen. Band 1* [36], Kap. I.
- Schwartz, *Mathematische Methoden der Physik. Band 1* [37], Kap. II.