

# KAPITEL VI

## Einleitung

VI.1 Grundbegriffe und Definitionen 132

VI.2 Einheiten 134

Die Elektrodynamik beruht auf ein paar gekoppelten Gleichungen, die das Wechselspiel von elektrischen und magnetischen Feldern  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  mit elektrischen Ladungen und Strömen  $\rho_{\text{el.}}$ ,  $\vec{j}_{\text{el.}}$  beschreiben. Somit können die *Maxwell-Gleichungen*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \quad (\text{VI.1a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0 \quad (\text{VI.1b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{VI.1c})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}). \quad (\text{VI.1d})$$

als die Gleichungen angesehen werden, welche die „Antwort“ vom elektromagnetischen Feld auf die Wirkung dessen Quellen modellieren.

Jede der Maxwell-Gleichungen trägt einen eigenen Namen, der sich meistens auf die davon abgeleitete — jedoch historisch früher gefundene — integrale Formulierung der Gleichung. Somit ist Gl. (VI.1a) die *Maxwell-Gauß<sup>(y)</sup>-Gleichung* — entsprechend dem in § VII.1.2 diskutierten Gaußschen Gesetz. Dann wird Gl. (VI.1b) (relativ selten) *Maxwell-Thomson<sup>(z)</sup>-Gleichung* genannt. Gleichung (VI.1c) heißt *Maxwell-Faraday-Gleichung*, denn sie stellt die differentiale Formulierung des Faraday<sup>(aa)</sup>-Induktionsgesetzes (§ IX.1.1 a) dar. Schließlich ist Gl. (VI.1d) die *Maxwell-Ampère<sup>(ab)</sup>-Gleichung*, die das Ampère-Gesetz (§ VIII.1.3 c) verallgemeinert.

Wiederum erfahren elektrische Ladungen und Ströme in einem elektromagnetischen Feld eine Kraft. Die zugehörige Kraftdichte, d.h. Kraft pro Volumeneinheit, ist die *Lorentz-Kraftdichte*

$$\vec{f}_{\text{L}}(t, \vec{r}) = \rho_{\text{el.}} \vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}). \quad (\text{VI.2})$$

In diesem Einführungskapitel werden die verschiedenen Größen und Faktoren, die in den Gleichungen (VI.1)–(VI.2) auftreten, erläutert (Abschn. VI.1). Dann befasst sich Kapitel VI.2 mit dem Problem der „Einheiten“ in der Elektrodynamik.

<sup>(y)</sup>C. F. GAUSS, 1777–1855

<sup>(z)</sup>W. THOMSON, Lord KELVIN, 1824–1907

<sup>(aa)</sup>M. FARADAY, 1791–1867

<sup>(ab)</sup>A.-M. AMPÈRE, 1775–1836

## VI.1 Grundbegriffe und Definitionen

Die Größen  $\vec{E}(t, \vec{r})$  und  $\vec{B}(t, \vec{r})$  sind mathematische Vektorfelder, die jeweils das elektrische und das magnetische Feld beschreiben. Beide Felder — genau wie jedes Feld, das in der Elektrodynamik eingeführt wird — sind im Prinzip in jedem Punkt  $\vec{r}$  des Raums und zu jeder Zeit  $t$  definiert, sind also Felder auf der Raumzeit oder auf einem Gebiet davon.

Genauer heißt das Vektorfeld  $\vec{E}$  *elektrische Feldstärke*, mit physikalischer Dimension  $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-3}$  und SI-Einheit  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ , wobei V für das Volt steht. Wiederum wird  $\vec{B}$  als *magnetische Flussdichte* oder *magnetische Induktion* bezeichnet; die zugehörige Dimension bzw. SI-Einheit ist  $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$  bzw. das Tesla T.

Zur Beschreibung der elektrischen und magnetischen Felder in einem Medium werden weitere Vektorfelder eingeführt, und zwar die *elektrische Flussdichte* (oder *dielektrische Verschiebung*)  $\vec{D}$  und die *magnetische Feldstärke*  $\vec{H}$ , weshalb die genaueren Bezeichnungen manchmal nötig sind. Im Vakuum, wie es im Rahmen dieses Skripts der Fall sein wird, sind die Ausdrücke „elektrisches Feld“ und „magnetisches Feld“ eindeutig.

Die materiellen „Quellen“ des elektromagnetischen Feldes auf der rechten Seite der Maxwell-Gleichungen (VI.1) sind die elektrischen Ladungsdichte und -stromdichte  $\rho_{\text{el.}}$  und  $\vec{j}_{\text{el.}}$ . Die erstere ist natürlich die elektrische Ladung pro Volumeneinheit, so dass deren Integral über ein Gebiet  $\mathcal{V}$

$$Q_{\mathcal{V}}(t) \equiv \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \, d^3\vec{r} \quad (\text{VI.3})$$

die gesamte *elektrische Ladung* im Volumen  $\mathcal{V}$  zur Zeit  $t$  darstellt.

Wiederum ist die elektrische Stromdichte derart definiert, dass deren Flächenintegral

$$I(t) \equiv \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \cdot d^2\vec{\mathcal{S}} \quad (\text{VI.4})$$

die *elektrische Stromstärke* durch die Fläche  $\mathcal{S}$  zur Zeit  $t$  ist, wobei die Stromstärke die Gesamtladung ist, die pro Zeiteinheit durch  $\mathcal{S}$  strömt. Dementsprechend stellt die elektrische Stromdichte  $j_{\text{el.}}$  die Ladung dar, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche fließt.

Eine elektrische Ladung  $Q$  bzw. Stromstärke  $I$  hat im SI-System die physikalische Dimension  $[Q] = \text{IT}$  bzw.  $[I] = \text{I}$  — die elektrische Stromstärke ist eine Basisgröße des Internationalen Größensystems —, mit der SI-Einheit Coulomb<sup>(ac)</sup> (C) bzw. Ampere (A), wobei  $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ . Daraus folgt, dass die elektrische Ladungsdichte bzw. Stromdichte die Dimension  $[\rho_{\text{el.}}] = \text{ITL}^{-3}$ , gemessen in  $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$  bzw.  $[\vec{j}_{\text{el.}}] = \text{ITL}^{-2}$  (Einheit  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) hat.

Man sieht also, dass die elektrische Stromdichte die Dimension des Produkts aus Ladungsdichte und Geschwindigkeit hat. Dies lässt sich an einem einfachen Beispiel gut nachvollziehen: betrachte man Punktladungen, die sich alle mit der gleichen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen. Diejenigen, die im Zeitintervall  $[t, t + \delta t]$  durch eine ebene Fläche  $\mathcal{S}$  strömen, sind solche, die sich zur Zeit  $t$  innerhalb eines Zylinders mit Basis  $\mathcal{S}$  und den Seiten parallel zu  $\vec{v}$  befinden (Abb. VI.1). Dabei ist die Höhe des Zylinders  $\vec{v} \cdot \vec{e}_n \delta t$ , wobei  $\vec{e}_n$  den Normaleinheitsvektor zur Fläche  $\mathcal{S}$  bezeichnet. Da das Zylindervolumen  $\mathcal{S} \vec{v} \cdot \vec{e}_n \delta t$  beträgt, stellen die Punktladungen innerhalb des Zylinders eine Gesamtladung

$$\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \mathcal{S} \vec{v} \cdot \vec{e}_n \delta t$$

dar. Laut der Gl. (VI.4) soll diese elektrische Ladung auch gleich

$$I(t) \delta t = \vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \cdot \mathcal{S} \vec{e}_n \delta t$$

sein, weil  $\mathcal{S} \vec{e}_n$  der mit der Fläche assoziierte Vektor ist. Somit gilt in diesem Fall

$$\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) \vec{v}. \quad (\text{VI.5})$$

<sup>(ac)</sup>C. A. COULOMB, 1736–1806

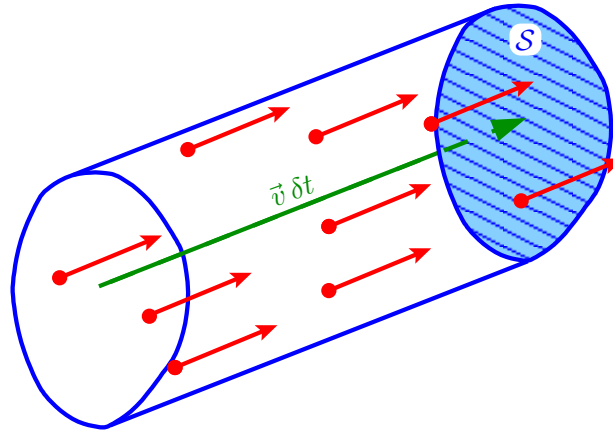


Abbildung VI.1

Das Ergebnis lässt sich direkt verallgemeinern: für eine Menge aus  $N$  Punktladungen  $\{q_a\}$  mit jeweiligen Ortsvektoren  $\{\vec{x}_a(t)\}$  und Geschwindigkeiten  $\{\vec{v}_a(t)\}$  zur Zeit  $t$  lautet die elektrische Ladungsdichte

$$\rho_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \sum_{a=1}^N q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)). \quad (\text{VI.6a})$$

Dabei ist  $\delta^{(3)}$  die dreidimensionale Dirac-Distribution, die dafür sorgt, dass nur die Raumpunkte beitragen, wo sich eine Punktladung gerade befindet. Integriert über irgendein Volumen ergibt diese Ladungsdichte die Summe der Ladungen, die innerhalb des Volumens sind, wie in Gl. (VI.3). Andererseits ist die elektrische Stromdichte der Punktladungen

$$\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r}) = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)). \quad (\text{VI.6b})$$

Falls alle Geschwindigkeiten den gleichen Wert  $\vec{v}$  haben, findet man die Beziehung (VI.5) wieder.

Betrachtet man eine einzige Punktladung mit Position  $\vec{x}(t)$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  zur Zeit  $t$ , so führen die Gl. (VI.6), eingesetzt in die Lorentz-Kraftdichte (VI.2), zu

$$\vec{f}_{\text{L}}(t, \vec{r}) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}(t)) [\vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(t, \vec{r})]. \quad (\text{VI.7})$$

Das Integral dieser Kraftdichte über irgendein Volumen, das die Punktladung enthält, gibt

$$\vec{F}_{\text{L}}(t) = q [\vec{E}(t, \vec{x}(t)) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(t, \vec{x}(t))], \quad (\text{VI.8})$$

d.h. die *Lorentz-Kraft* auf die Punktladung.

In den Maxwell-Gleichungen treten (im SI-System, vgl. Abschn. VI.2) zwei Konstanten auf:

- die *elektrische Feldkonstante*  $\epsilon_0$ , die früher *Permittivität des Vakuums* genannt wurde;
- die *magnetische Feldkonstante*  $\mu_0$ , früher *Permeabilität des Vakuums*.

Im SI-System beträgt die erstere  $\epsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  mit F dem Farad ( $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ ), und die letztere ist definitionsgemäß  $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ . Die jeweiligen physikalischen Dimensionen im internationalen Größensystem sind  $[\epsilon_0] = \text{M}^{-1} \text{ L}^{-3} \text{ T}^4 \text{ I}^2$  und  $[\mu_0] = \text{L M T}^{-2} \text{ I}^{-2}$ .

### Beispiele von Ladungs- und Stromverteilungen

Ein erstes Beispiel von elektrischer Ladungs- und Stromdichte ist das von Punktladungen, das oben diskutiert wurde.

Betrachte man eine Metallkugel mit Radius  $R$ , auf deren Oberfläche eine Gesamtladung  $Q$  homogen verteilt ist. In einem sphärischen Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum der Kugel soll die zugehörige Ladungsdichte der Form  $\rho_{\text{el.}}(\vec{r}) \propto \delta(r - R)$  sein, wobei  $r \equiv |\vec{r}|$ ; sei  $K$  der Proportionalitätsfaktor. Laut Beziehung (VI.3) soll

$$\int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r} = Q$$

gelten. Das Integral lässt sich als

$$\int \rho_{\text{el.}}(\vec{r}) 4\pi r^2 dr = \int K\delta(r - R) 4\pi r^2 dr = 4\pi R^2 K$$

umschreiben, woraus  $K = Q/4\pi R^2$  folgt.

**Bemerkung:** Zur Beschreibung einer solchen Ladungsverteilung, die auf einer Ober- oder Grenzfläche eingeschränkt ist, wird manchmal eine *Flächenladungsdichte* eingeführt, die die elektrische Ladung pro Einheitsfläche darstellt. Dabei handelt es sich um eine Funktion von nur zwei Ortskoordinaten, welche die Fläche parametrisieren, statt drei: im obigen Beispiel könnte man zwei Winkel (Polar- und Azimutwinkel  $\theta, \varphi$ ) wählen. Auf ähnlicher Weise definiert man auch *elektrische Flächenstromdichten*.

Als nächstes Beispiel sei ein elektrischer Strom mit Stärke  $I$  durch einen unendlich dünnen geradlinigen Draht lokalisiert auf der  $z$ -Achse eines Systems kartesischer Koordinaten. Die zugehörige Ladungsstromdichte ist der Form  $\vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) = K\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$  mit einer festzustellenden Konstanten  $K$ . Sei  $\mathcal{S}$  eine durch den Draht durchlaufene Fläche parallel zur  $(x, y)$ -Ebene. Beziehung (VI.4) lautet

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) \cdot d^2\vec{S} = \int K\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z \cdot d^2\mathcal{S}\vec{e}_z = K,$$

und legt somit  $\vec{j}_{\text{el.}}$  fest.

**Bemerkung:** Hier handelt es sich um eine *Linienstromdichte*, die nur von  $z$  abhängt. Ähnlich gibt es *Linienladungsdichten*.

## VI.2 Einheiten

In diesem Skript werden die SI-Einheiten und dementsprechend die physikalischen Größen des Internationalen Größensystems verwendet.

Manche Referenzen benutzen aber andere Systeme, insbesondere um die Feldkonstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  loszuwerden. Dabei handelt es sich<sup>(56)</sup> nicht um eine Wahl von Einheiten, wie der Einfachheit halber oft gesagt wird, sondern wirklich um eine Neudefinition der elektromagnetischen Größen (Ladung, elektrisches und magnetisches Feld, usw.). Dementsprechend nehmen die Gleichungen eine andere Form an.

Um die Gleichungen aus dem Internationalen Größensystem in ein anderes System zu übersetzen, braucht man nur einige Konversionsfaktoren zwischen den Größen in beiden Systemen. Hiernach beziehen sich die physikalischen Größen mit einem Sternchen auf ein alternatives System.

Somit schreibt man für die elektrische Ladung

$$q \equiv \sqrt{\epsilon_0\psi} q^*, \quad (\text{VI.9a})$$

was für die Ladungsdichte und -stromdichte zu den Skalierungen

$$\rho_{\text{el.}} = \sqrt{\epsilon_0\psi} \rho_{\text{el.}}^*, \quad \vec{j}_{\text{el.}} = \sqrt{\epsilon_0\psi} \vec{j}_{\text{el.}}^* \quad (\text{VI.9b})$$

führt. Das elektrische Feld wird gewöhnlich derart umdefiniert, dass dessen Produkt mit der Ladung

<sup>(56)</sup>... trotz des Titels dieses Abschnitts!

die gleiche Form erhält: mit

$$\vec{E} \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \psi}} \vec{E}^* \quad (\text{VI.9c})$$

gilt  $q\vec{E} = q^*\vec{E}^*$ . Wiederum transformiert sich die magnetische Induktion gemäß

$$\vec{B} \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\psi'}} \vec{B}^*. \quad (\text{VI.9d})$$

In der „Übersetzung“ der Gleichungen sollen schließlich alle auftretenden Produkte  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  durch  $1/c$  ersetzt werden.

Mit diesen Rezepten wird die Lorentz-Kraftdichte (VI.2) zu

$$\vec{f}_L^* = q^* \left( \vec{E}^* + \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}} \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}^* \right), \quad (\text{VI.10a})$$

mit dem charakteristischen Faktor  $1/c$  vor dem magnetischen Feld. Im neuen Größensystem lauten die Maxwell-Gleichungen nach einiger trivialen Umschreibung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = \psi \rho_{\text{el}}^* \quad (\text{VI.10b})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^* = 0 \quad (\text{VI.10c})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^* + \sqrt{\frac{\psi}{\psi'}} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{VI.10d})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^* - \sqrt{\frac{\psi'}{\psi}} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} = \frac{\sqrt{\psi \psi'}}{c} \vec{j}_{\text{el}}^*. \quad (\text{VI.10e})$$

Dazu werden natürlich auch weitere Gleichungen geändert, wie z.B. der Ausdruck des Coulomb-Potentials (VII.14b) zwischen zwei statischen Punktladungen  $q_1, q_2$  im Abstand  $r_{12}$  voneinander, das zu

$$V = \frac{\psi q_1^* q_2^*}{4\pi r_{12}} \quad (\text{VI.11})$$

wird.

Die Konversionsfaktoren und die Konventionen für  $\epsilon_0, \mu_0$  und  $c$  für die am meisten benutzten Systeme werden in der Tabelle (VI.1) zusammengefasst.

**Tabelle VI.1** – Konversionsfaktoren zwischen Größensystemen.

	$\epsilon_0$	$\mu_0$	$c$	$\psi$	$\psi'$
„SI-System“	$\frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$	$c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$	$\mu_0 c^2$	$\frac{\mu_0}{c^2}$
Gauß-System	1	1	$c$	$4\pi$	$4\pi$
Heaviside <sup>(ad)</sup> -Lorentz-System	1	1	$c$	1	1

**Bemerkung:** In den Gauß- und Heaviside-Lorentz-Systemen haben die Felder  $\vec{E}^*$  und  $\vec{B}^*$  die gleiche physikalische Dimension, weshalb sie hoch beliebt sind. Dementsprechend nehmen die linken Seiten der Gl. (VI.10d) und (VI.10e) eine ähnliche Form an — bis auf das Minus-Zeichen —, was auch sehr angenehm ist.

Dagegen gilt die Beziehung  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  [vgl. Gl. (IX.29c)] nicht mehr — was der Autor dieser Zeilen schade findet —, es sei denn, man wählt ein System von (sog. „natürlichen“) Einheiten mit  $c = 1$ .

<sup>(ad)</sup>O. HEAVISIDE, 1850–1925

## Literatur zum Kapitel VI

- Fließbach, *Elektrodynamik* [2] Teil II.
- Greiner, *Klassische Elektrodynamik II* [8] Kap. I.
- Griffiths, *Elektrodynamik* [9] = *Introduction to Electrodynamics* [10] Kap 2.1–2.4 & 3.
- Jackson, *Klassische Elektrodynamik* [11] = *Classical Electrodynamics* [12] Kap. 1.1–1.5, 1.7–1.11, 2.1, 3.5–3.6 & 4.1–4.2.
- Nolting, *Elektrodynamik* [17] Kap. 2.1–2.3.
- Scheck, *Klassische Feldtheorie* [19] Kap. 1.5 & 1.7.