

## V.2 Phasenraum

Jeder Bewegungszustand eines mechanischen Systems lässt sich durch einen Punkt  $(\{q^\alpha\}, \{p_\alpha\})$  im Phasenraum  $\Gamma$  darstellen, während die Bewegung im physikalischen Raum durch eine Phasenraumtrajektorie dargestellt wird. Insbesondere können die Gleichgewichtspositionen eines Systems sowie ihre Stabilität anhand des Verhaltens der Trajektorie im Phasenraum des Systems einfach erkannt werden.

In § V.2.1 werden die Phasenraumtrajektorien einiger eindimensionaler Probleme vorgestellt und ihre Eigenschaften diskutiert. Dann wird in § V.2.2 ein wichtiges Ergebnis dargelegt, das Liouville-Theorem, das insbesondere in der klassischen statistischen Physik eine große Rolle spielt.

### V.2.1 Phasenraumtrajektorien

#### V.2.1 a Erste Eigenschaften

Sei  $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0))$  der Bewegungszustand eines Systems zu irgendeinem Zeitpunkt  $t_0$ . Laut den kanonischen Gleichungen (V.4) ist der Zustand des Systems zu einer späteren Zeit völlig bestimmt: z.B. gilt nach einer infinitesimal kleinen Zeitspanne  $\delta t$

$$q^\alpha(t_0 + \delta t) \simeq q^\alpha(t_0) + \frac{dq^\alpha(t_0)}{dt} \delta t = q^\alpha(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0))}{\partial p_\alpha} \delta t$$

$$p_\alpha(t_0 + \delta t) \simeq p_\alpha(t_0) + \frac{dp_\alpha(t_0)}{dt} \delta t = p_\alpha(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0))}{\partial q^\alpha} \delta t$$

für alle  $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ , wobei  $\mathcal{H}$  die Hamilton-Funktion des Systems ist.

Wenn  $\mathcal{H}$  nicht explizit von der Zeit abhängt, wie wir in diesem Abschnitt annehmen werden, sind ihre partiellen Ableitungen in einem Punkt von  $\Gamma$  völlig durch die Koordinaten des Punkts bestimmt. Somit kann in diesem Fall durch jeden (physikalisch realisierbaren) Punkt des Phasenraums nur eine einzige Trajektorie gehen, d.h. Phasenraumtrajektorien kreuzen sich nicht.<sup>(48)</sup>

<sup>(48)</sup>Die scheinbaren Ausnahmen zu dieser Regel in Abb. V.3 und V.4 werden hiernach erklärt.

Bei periodischen Bewegungen befindet sich das System nach einer Periodendauer  $\mathcal{T}$  erneut im gleichen Bewegungszustand. Dementsprechend kommt die Phasenraumtrajektorie des Systems zurück zum gleichen Punkt: die Trajektorie in  $\Gamma$  ist dann eine geschlossene Kurve.

Ein Sonderfall davon besteht aus den in Abschn. IV.1 eingeführten Gleichgewichtslösungen des Problems: da die Position zeitunabhängig ist, bleiben die generalisierten Koordinaten  $q$  konstant. dazu verschwinden die verallgemeinerten Kräfte, d.h. die Zeitableitung der Impulse, so dass auch die letzteren konstant bleiben. Demzufolge wird eine solche stationäre Lösung im Phasenraum durch einen einzigen Punkt, einen *Fixpunkt*, dargestellt.

Dabei lassen sich stabile und instabile Gleichgewichtslösungen noch leicht voneinander unterscheiden. In der Nachbarschaft eines stabilen Gleichgewichts finden nämlich kleine Schwingungen statt, die wie oben gesagt durch geschlossene Kurven im Phasenraum dargestellt sind. Im Gegensatz dazu befinden sich in der Nähe einer instabilen Gleichgewichtslösung sowohl Trajektorien, die sich dem Fixpunkt nähern, als andere, die sich davon entfernen.

### V.2.1 b Beispiele

Der Phasenraum  $\Gamma$  eines Systems mit  $s$  Freiheitsgraden ist  $2s$ -dimensional: somit lassen sich Phasenräume günstig nur für Probleme mit  $s = 1$  Freiheitsgrad darstellen. Im Folgenden werden die Phasenräume von drei solchen Problemen mit zeitunabhängiger Hamilton-Funktion diskutiert.

#### Harmonischer Oszillator

Betrachten wir zuerst den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamilton-Funktion

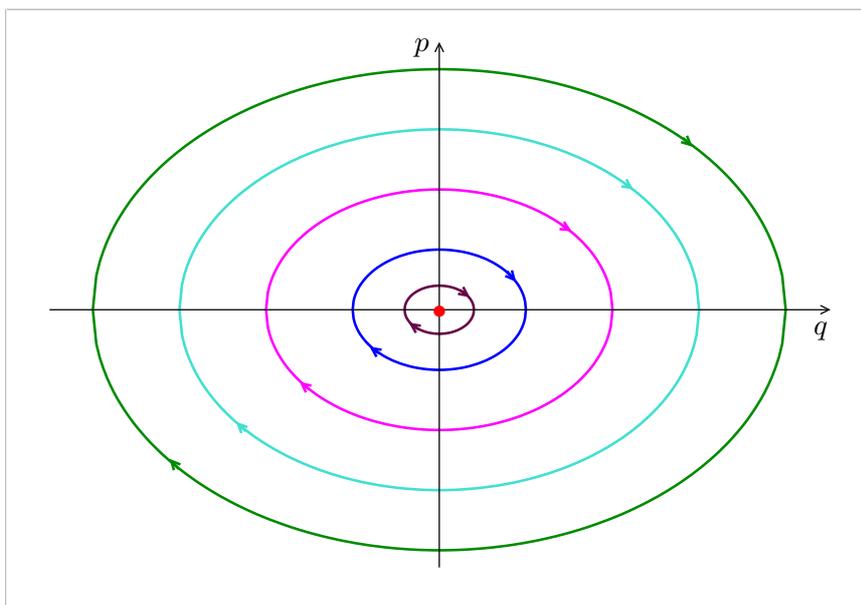
$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (\text{V.13})$$

Das System wurde schon in § V.1.4 b untersucht; die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind der Form

$$q(t) = A \cos \omega(t - t_0) \quad , \quad p(t) = -m\omega A \sin \omega(t - t_0), \quad (\text{V.14})$$

wobei  $A$  der Wert von  $q$  zur Zeit  $t_0$  ist, während die letztere so gewählt wird, dass  $p(t_0) = 0$ .

In der  $(q, p)$ -Ebene, entsprechend dem Phasenraum des Oszillators, ist die durch  $t$  parametrisierte Kurve (V.14) für einen bestimmten Wert von  $A$  eine Ellipse mit Halbachsen  $A$  und  $m\omega A$ , deren Zentrum im Nullpunkt  $q = 0, p = 0$  liegt. In Abb. V.1 werden einige solche Phasenraumtrajektorien



**Abbildung V.1** – Phasenraumtrajektorien eines eindimensionalen harmonischen Oszillators.

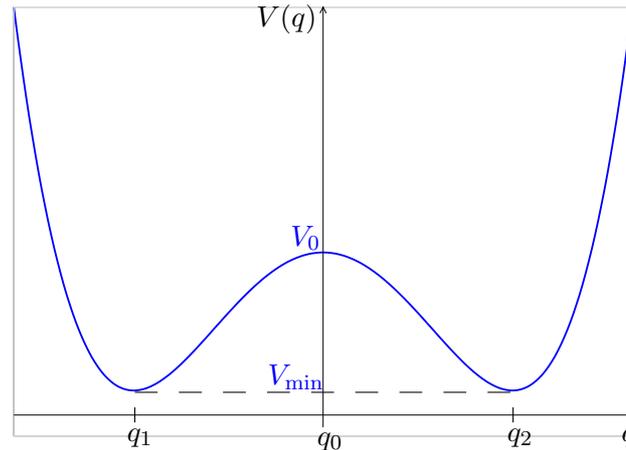
dargestellt, insbesondere der Sonderfall mit  $A = 0$ , welcher der (stabilen) Gleichgewichtslösung des Systems entspricht.

### Doppelmuldenpotential

Als nächstes Beispiel betrachten wir die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts in dem „Doppelmuldenpotential“

$$V(q) = V_0 - \frac{\mu}{2}(q - q_0)^2 + \frac{\lambda}{4}(q - q_0)^4 \quad \text{mit } \lambda, \mu > 0, \quad (\text{V.15})$$

wobei  $q_0, V_0 \in \mathbb{R}$ . Dieses Potential hat ein lokales Maximum bei  $q = q_0$  und zwei globale Minima bei  $q_1 = q_0 - \sqrt{\mu/\lambda}$  und  $q_2 = q_0 + \sqrt{\mu/\lambda}$ , wie in Abb. V.2 gezeigt wird.

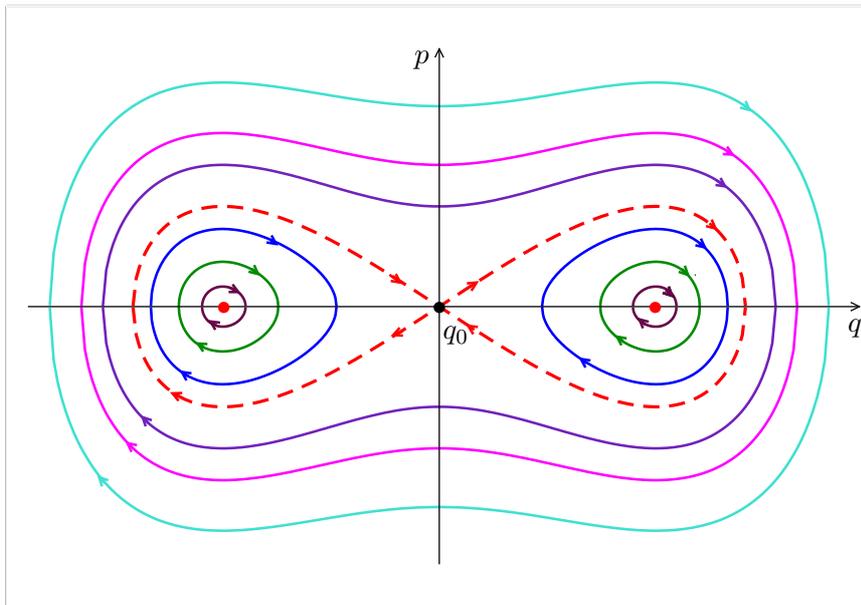


**Abbildung V.2** – Verlauf des Doppelmuldenpotentials (V.15)

Sei  $V_{\min} \equiv V(q_1) = V(q_2)$ . Je nach dem Wert der Energie  $E \geq V_{\min}$  des Massenpunkts treten unterschiedliche Verhalten auf, denen wiederum verschiedenartige Phasenraumtrajektorien zugeordnet sind, s. Abb. V.3.

- Wenn  $E = V_{\min}$  kann sich der Massenpunkt entweder in  $q_1$  oder in  $q_2$ , d.h. in einer der stabilen Gleichgewichtspositionen, befinden. Im Phasenraum werden diese Möglichkeiten durch (rot gemalte) Fixpunkte dargestellt.
- Wenn  $V_{\min} < E < V_0 = V(q_0)$  kann sich der Massenpunkt in einer der Mulden periodisch bewegen. Somit sind die entsprechenden Phasenraumtrajektorien geschlossene Kurven um den jeweiligen Fixpunkt.
- Der Energie  $E = V_0$  entsprechen zwei Möglichkeiten:
  - Falls der Massenpunkt sich genau in  $q_0$  befindet, dann hat er keine kinetische Energie. Dementsprechend wird das System in dieser Gleichgewichtsposition, die in Abb. V.3 mit einem schwarzen Punkt dargestellt ist, stationär bleiben.
  - Ist der Massenpunkt nicht in  $q_0$ , sondern in einer der beiden Mulden, wird er sich bewegen. Sei z.B. angenommen, dass er sich in der rechten Mulde mit  $q > q_0$  befindet — die Diskussion für den Fall  $q < q_0$  ist analog. Wenn der Impuls  $p$  des Massenpunkts negativ ist, bewegt er sich nach links, bis er (asymptotisch) den Fixpunkt bei  $q = q_0$  erreicht. Wenn dagegen  $p$  positiv ist, wird der Massenpunkt sich erstens weiter in die positive  $q$ -Richtung bewegen, bis er den Punkt rechts von  $q_2$  erreicht, wo  $V(q) = V_0$ : in diesem Punkt<sup>(49)</sup> verschwindet sein Impuls, der danach negativ wird, so dass die Bewegung nun nach links bis zum Fixpunkt in  $q = q_0$  stattfindet.

<sup>(49)</sup> Im physikalischen Raum handelt es sich um einen Umkehrpunkt.



**Abbildung V.3** – Phasenraum für die Bewegung im Doppelmuldenpotential (V.15).

Diesen Bewegungen wird im Phasenraum der Abb. V.3 die gestrichelte (rote) Kurve zugeordnet. Dabei bleibt der Massenpunkt je nach der Anfangsbedingung entweder rechts oder links von  $q_0$ , und er nähert sich dem instabilen Fixpunkt nur für  $t \rightarrow +\infty$ . Somit treffen sich die zwei Teile der gestrichelten Kurve mit  $q > q_0$  bzw.  $q < q_0$  in der Tat nicht.

- Wenn  $E > V_0$  kann sich der Massenpunkt in der ganzen Doppelmulde periodisch bewegen. Die zugehörigen Phasenraumtrajektorien sind geschlossene Kurven, welche die beiden stabilen Fixpunkte umkreisen und bei  $q = q_0$  einen nicht-verschwindenden Impuls  $p$  — entweder positiv oder negativ — haben.

Die gestrichelte Kurve in Abb. V.3 trennt Phasenraumgebiete mit unterschiedlichen Verhalten — Bewegung in einer der kleinen Mulden oder in der ganzen Doppelmulde — voneinander. Eine solche Kurve wird *Separatrix* genannt.

### Ebenes Pendel

Schließlich betrachten wir ein ebenes Pendel mit einer Masse  $m$  am Ende eines masselosen Stabs der Länge  $l$  in einem Schwerfeld (vgl. § III.2.4). Wenn  $\varphi$  den Ablenkwinkel von der Richtung des Schwerfeldes bezeichnet, führt die Standard-Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$  [Gl. (III.29)] zum konjugierten Impuls  $p_\varphi = ml^2\dot{\varphi}$  und somit zur Hamilton-Funktion

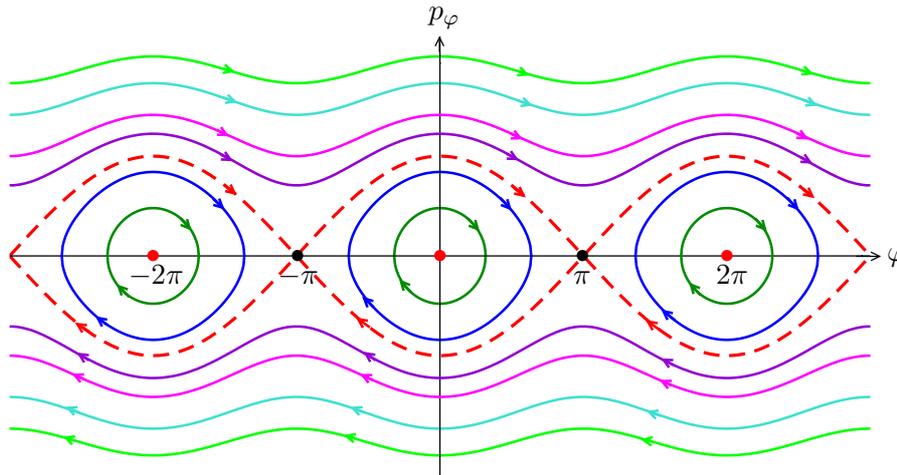
$$\mathcal{H}(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi. \quad (\text{V.16})$$

Das System hat eine stabile Gleichgewichtsposition bei  $\varphi = 0$  und eine instabile bei  $\varphi = \pi$ .

Auf erster Sicht könnte man die Werte des Winkels  $\varphi$  auf das Intervall  $[-\pi, \pi]$  einschränken. Dies reicht aus, um die periodischen Schwingungen mit Amplitude  $\varphi_0 < \pi$  um die stabile Gleichgewichtsposition zu beschreiben. Wie üblich werden solche Oszillationen im Phasenraum durch geschlossene Kurven um den Fixpunkt ( $\varphi = 0, p_\varphi = 0$ ) dargestellt (Abb. V.4).

Wenn die Energie der Masse groß genug ist, kann das Pendel periodisch um den Aufhängepunkt drehen, anstatt Schwingungen durchzuführen. Um solche Bewegungen günstiger — d.h. ohne Sprung des Winkels — zu beschreiben, erweitert man die Wertemenge von  $\varphi$  auf die ganze reelle Gerade  $\mathbb{R}$ , wie in Abb. V.4 gemacht wird. Dann werden diese periodischen Rotationsbewegungen durch  $\varphi$ -periodische Kurven dargestellt — und nicht mehr durch geschlossene Kurven.

Die Drehbewegungen werden von den Schwingungsbewegungen durch Separatrizen getrennt, die durch die periodisch wiederholte Darstellung des instabilen Fixpunkts gehen. Wie in der Diskussion



**Abbildung V.4** – Phasenraum eines ebenen Pendels

des Phasenraums für die Bewegung im Doppelmuldenpotential entspricht die Portion einer Separatrix zwischen zwei sukzessiven Fixpunkten einer möglichen Bewegung, die einen Fixpunkt für  $t \rightarrow +\infty$  erreicht: solche Phasenraumtrajektorien kreuzen eigentlich nicht die  $\varphi$ -Achse.

### V.2.2 Satz von Liouville

Betrachten wir zu einer bestimmten Zeit  $t_0$  ein ( $2s$ -dimensionaler) Bereich  $d\Gamma(t_0)$  im Phasenraum  $\Gamma$  eines mechanischen Systems mit  $s$  Freiheitsgraden und zeitunabhängiger Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$ . Die Punkte dieses Bereichs stellen unterschiedliche mögliche Bewegungszustände des Systems dar — die man sich auch als die jeweiligen Bewegungszustände von identischen Kopien des Systems vorstellen kann.

Zu einem späteren Zeitpunkt  $t_1$  hat jede Phasenraumtrajektorie, dessen Punkt zu  $t_0$  in  $d\Gamma(t_0)$  lag, einen neuen Punkt des Phasenraums erreicht: sei  $d\Gamma(t_1)$  der neue Bereich, den diese Punkte aufspannen. Dann ist das Volumen<sup>(50)</sup> von  $d\Gamma(t_1)$  gleich dem von  $d\Gamma(t_0)$ , in Übereinstimmung mit dem

**Theorem (Satz von Liouville<sup>(v)</sup>):**<sup>(51)</sup>

*Für ein konservatives Hamiltonsches System bleibt das von benachbarten Phasenraumtrajektorien eingeschlossene Volumen konstant in der Zeitentwicklung.* (V.17)

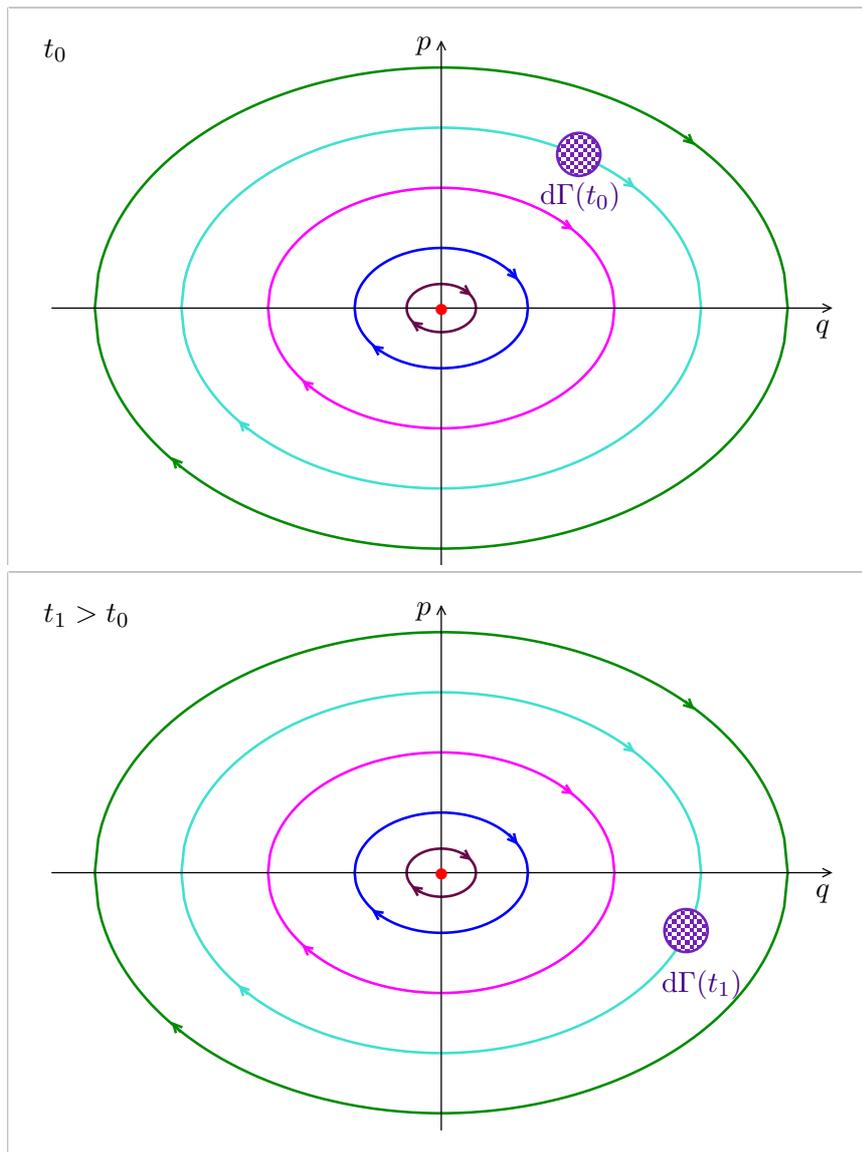
Eine erste Anwendung dieses Satzes wird in Abb. V.5 am Beispiel des eindimensionalen harmonischen Oszillators illustriert. In diesem Fall sind *alle* Phasenraumtrajektorien Ellipsen mit dem gleichen Zentrum, der gleichen Orientierung und der gleichen Exzentrizität, und die „Winkelgeschwindigkeit“ in der  $(q, p)$ -Ebene entlang dieser Trajektorien ist ebenfalls immer die gleiche: die Punkte des Phasenraums drehen sich um den Fixpunkt  $(q = 0, p = 0)$  wie die Punkte eines rotierenden starren Körpers. Infolgedessen bewegen sich Phasenraumvolumina in dieser Zeitentwicklung ohne sich zu ändern, was genau dem Satz von Liouville entspricht.

Der harmonische Oszillator stellt einen Ausnahmefall dar, indem sich die Phasenraumgebiete in der Zeitentwicklung des Systems nicht verformen. Ein klassischeres Verhalten ist das des in Abb. V.6 gezeigten ebenen Pendels: in der Zeitentwicklung ändert ein typisches Phasenraumgebiet seine Form, auch wenn sein Volumen gemäß dem Satz von Liouville unverändert bleibt.

<sup>(50)</sup>Um diese Volumina zu quantifizieren, müsste man ein Maß für die Gebiete von  $\Gamma$  spezifizieren.

<sup>(51)</sup>Dieses Theorem wird hier ohne Beweis angegeben.

<sup>(v)</sup>J. LIOUVILLE, 1809–1882



**Abbildung V.5**—Zeitentwicklung eines Volumenelements im Phasenraum des harmonischen Oszillators.

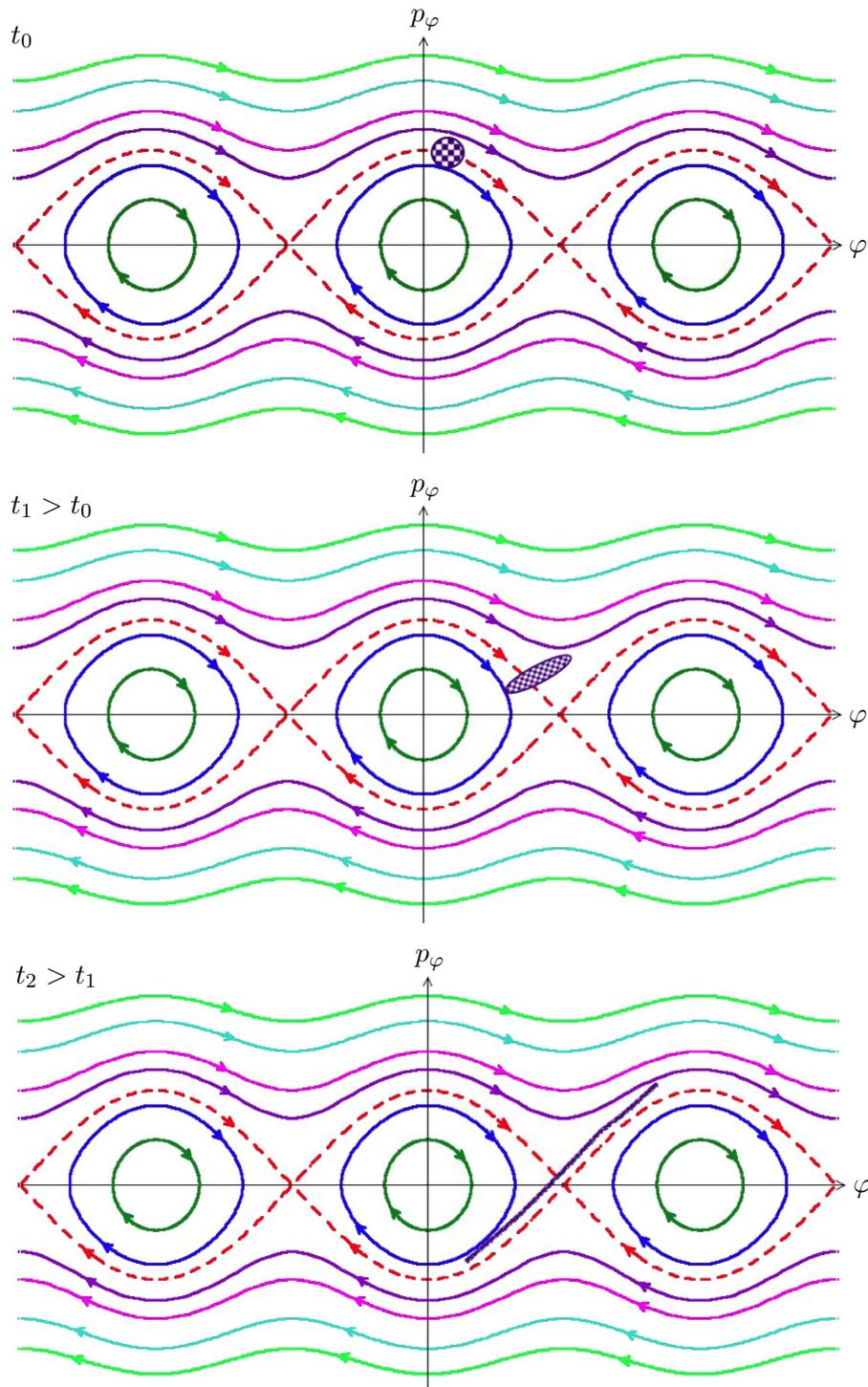
**Bemerkungen:**

\* Betrachtet man die Punkte des Phasenraums eines Systems als Bestandteile eines fiktiven „kontinuierlichen Mediums“, so entspricht die Zeitentwicklung des Systems der Bewegung dieses Mediums. Wie oben schon gesagt, ist im Fall des eindimensionalen harmonischen Oszillators das entsprechende Phasenraum-Medium ein starrer Körper, und dessen Bewegung ist eine Drehbewegung.

Im allgemeineren Fall, z.B. für das ebene Pendel, ist das Phasenraum-Medium aber deformierbar, so dass es sich eher um ein *Fluid*<sup>(52)</sup> handelt. Da das Volumen jedes Teilbereichs dieses Fluids sich laut dem Liouville-Theorem in der Bewegung nicht ändert, kann dieses Fluid nicht komprimiert (oder ausgedehnt) werden: es verhält sich wie ein sog. *inkompressibles Fluid*.

\* Am Beispiel des ebenen Pendels in Abb. V.6 wird auch ein anderes mögliches Verhalten illustriert. Zur Zeit  $t_0$  ist das Phasenraumgebiet  $d\Gamma(t_0)$  noch relativ eng um einen Zentralpunkt konzentriert, d.h. die verschiedenen Punkte im Bereich haben ziemlich ähnliche Positionen und Impulse. Als die Zeit vergeht verformt sich der Bereich in dessen Bewegung durch den Phasenraum immer mehr, so dass Trajektorien, die am Anfang nah aneinander lagen, sich nach einer Weile wie in  $d\Gamma(t_2)$  weit

<sup>(52)</sup>... wie z.B., in der echten physikalischen Welt, eine Flüssigkeit oder ein Gas.



**Abbildung V.6** – Entwicklung eines Volumenelements im Phasenraum des ebenen Pendels zu drei sukzessiven Zeiten  $t_2 > t_1 > t_0$  (von oben nach unten).

voneinander entfernen. Somit kann eine kleine Unbestimmtheit über den „Anfangs-“Zustand eines Systems nach einiger Zeit groß werden, entsprechend *Chaos* im System. Dabei bleibt die Dynamik aber völlig deterministisch, weil die Bewegungsgleichungen — die Hamiltonschen Gleichungen — selbst völlig deterministisch sind.

Zum Quantifizieren des Verhaltens sollte man einen Abstand  $d_T$  im Phasenraum einführen. Chaos wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand zwischen zwei typischen Trajektorien mit der Zeit

gemäß

$$d_{\Gamma}(t) \sim d_{\Gamma}(t_0) e^{\lambda(t-t_0)} \quad (\text{V.18})$$

wächst, wobei  $\lambda > 0$  der *Ljapunow*<sup>(w)</sup>-*Exponent* mit physikalischer Dimension  $\text{T}^{-1}$  ist. Dann stellt die *Ljapunow-Zeit*  $\lambda^{-1}$  die typische Zeitskala dar, über die sich sinnvolle Vorhersagen über das System machen lassen.

## V.3 Poisson-Mechanik

Die Hamilton-Mechanik kann noch in einer alternativen Form formuliert werden, in welcher der Phasenraum  $\Gamma$  eines Systems und die darauf definierten Funktionen (§ V.3.1) eine zentrale Rolle spielen. Dabei wird eine bilineare Abbildung auf  $\Gamma$  eingeführt, die Poisson<sup>(x)</sup>-Klammer, die mit zwei Phasenraumfunktionen eine neue Phasenraumfunktion assoziiert (§ V.3.2). Anhand dieser Abbildung lässt sich die Zeitableitung irgendeiner Funktion auf  $\Gamma$  einfach ausdrücken, und insbesondere die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen symmetrisch umschreiben (§ V.3.3). Abschnitt V.3.4 befasst sich mit den Koordinatentransformationen, welche die Form der Bewegungsgleichungen invariant lassen. Schließlich wird der Zusammenhang zwischen den Symmetrien eines physikalischen Systems und den Erhaltungsgrößen im Rahmen des Hamilton-Formalismus wiedergefunden (§ V.3.5).

Es sei hier schon erwähnt, dass das große Interesse der hier eingeführten Formulierung daran liegt, dass sie den „klassischen Limes“ des Hamilton-Formalismus der Quantenmechanik darstellt.

### V.3.1 Phasenraum-Funktionen

Die verallgemeinerten Koordinaten  $\{q^{\alpha}\}$  und die dazu konjugierten Impulse  $\{p_{\alpha}\}$  bestimmen den Bewegungszustand eines mechanischen Systems vollständig. Somit lässt sich jede mögliche Größe, die diesen Zustand charakterisiert — wie z.B. die Position, der Drehimpuls oder die gesamte Energie —, durch die Phasenraumkoordinaten des Systems ausdrücken.

Dementsprechend ist es sinnvoll, Funktionen von der Zeit  $t$  und den  $2s$  Phasenraumkoordinaten  $\{q^{\alpha}\}, \{p_{\alpha}\}$  mit  $\alpha = 1, \dots, s$  zu betrachten. Im Rest dieses Kapitels werden solche Funktionen der Kürze halber „Phasenraum-Funktionen“ oder „Funktionen auf dem Phasenraum“ genannt, auch wenn die Zeit auch Argument der Funktion ist. Dazu wird angenommen, dass sie beliebig differenzierbar sind, ohne dass das jedes Mal erwähnt wird.

**Bemerkung:** Wenn die Funktion einer messbaren physikalischen Größe entspricht, anstatt nur ein mathematisches Konstrukt zu sein, wird sie auch *Observable* genannt.

### V.3.2 Poisson-Klammer

#### V.3.2 a Definition

**Definition:** Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen von der Zeit  $t$  und den  $2s$  Phasenraumkoordinaten  $\{q^{\alpha}\}, \{p_{\alpha}\}$  mit  $\alpha = 1, \dots, s$ . Ihre *Poisson-Klammer* ist ebenfalls eine Phasenraum-Funktion derselben Variablen, definiert durch

$$\{f, g\} \equiv \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q^{\alpha}} \right), \quad (\text{V.19})$$

wobei die  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ -Abhängigkeit aller Funktionen nicht geschrieben wurde.

#### Bemerkungen:

\* In der Literatur sind die Poisson-Klammern manchmal mit einem globalen Minus-Vorzeichen vor der rechten Seite definiert. Um nur internationale Standardreferenzen zu nennen ist die hier

<sup>(w)</sup>A. M. LJAPUNOW (auch LYAPUNOV), 1857–1918    <sup>(x)</sup>S. POISSON, 1781–1740

verwendete Konvention die gleiche wie bei Arnold [1] oder Goldstein [4, 5], während Landau & Lifschitz [13, 26] die alternative Konvention benutzen.

Auf ähnliche Weise ist die Notation nicht universell: somit benutzen viele Autoren rechteckige Klammern  $[\cdot, \cdot]$  — z.B. Arnold, Goldstein oder Landau & Lifschitz — um die formelle Analogie mit dem Kommutator der Quantenmechanik zu betonen.

\* Hiernach wird die Poisson-Klammer (V.19) manchmal auch mit  $\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$  bezeichnet, d.h. mit expliziter Angabe der relevanten Phasenraumkoordinaten.

Für die spätere Diskussion über kanonische Transformationen in § V.3.4 ist es günstig, die Poisson-Klammer in einer Matrixform zu schreiben. Dafür führt man die  $s$ -dimensionalen Spaltenvektoren

$$\nabla_{\mathbf{q}} f \equiv \begin{pmatrix} \partial f / \partial q_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial q_s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla_{\mathbf{p}} f \equiv \begin{pmatrix} \partial f / \partial p_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial p_s \end{pmatrix} \quad (\text{V.20})$$

ein. Diese können wiederum in einen Spaltenvektor mit insgesamt  $2s$  Komponenten kombiniert werden. Dann ist die Poisson-Klammer von  $f$  und  $g$  gegeben durch

$$\{f, g\} = ((\nabla_{\mathbf{q}} f)^{\top} \quad (\nabla_{\mathbf{p}} f)^{\top}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} g \\ \nabla_{\mathbf{p}} g \end{pmatrix}, \quad (\text{V.21})$$

wobei  $(\nabla_{\mathbf{q}} f)^{\top}$  und  $(\nabla_{\mathbf{p}} f)^{\top}$  die zu den Spaltenvektoren (V.20) transponierten Zeilenvektoren sind, während  $\mathbb{1}_s$  die  $s \times s$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

### V.3.2b Eigenschaften

Die Poisson-Klammer besitzt einige mathematischen Eigenschaften, die sich generell problemlos beweisen lassen und deshalb hiernach nur aufgelistet werden. Der Kürze halber wird die Abhängigkeit der verschiedenen Funktionen von ihren Variablen  $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  nicht geschrieben.

**Bilinearität** Seien  $f, g_1, g_2$  bzw.  $f_1, f_2, g$  drei Funktionen auf dem Phasenraum und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Dann gelten

$$\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\} = \lambda_1 \{f_1, g\} + \lambda_2 \{f_2, g\}, \quad (\text{V.22a})$$

$$\{f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\} = \lambda_1 \{f, g_1\} + \lambda_2 \{f, g_2\}. \quad (\text{V.22b})$$

**Antisymmetrie / Antikommutativität** Für jedes Paar  $(f, g)$  von Funktionen auf dem Phasenraum gilt

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (\text{V.23})$$

Daraus folgt trivial  $\{f, f\} = 0$ .

**Nullelemente** Sei  $K$  eine Zahl; die Funktion auf dem Phasenraum, die identisch konstant gleich  $K$  ist, ist ein Nullelement, d.h. ihre Poisson-Klammer mit jeder Funktion  $f$  auf dem Phasenraum verschwindet

$$\{f, K\} = 0. \quad (\text{V.24})$$

**Produktregel** Für jedes Triplet  $(f, g, h)$  von Funktionen auf dem Phasenraum gelten

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad (\text{V.25})$$

sowie die

**Jacobi-Identität**

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (\text{V.26})$$

Im Gegensatz zu den anderen Eigenschaften, die sich in einer Zeile nachprüfen lassen, ist der Beweis dieser Identität mühsam. Jeder der drei Terme ist eine Summe über zwei Freiheitsgrade-Indizes von 8 Beiträgen, die selbst Produkte von zwei Ableitungen und einer doppelten Ableitung sind. Das Spiel besteht darin, Indizes zu umbenennen und die Vertauschung der Ordnung der Ableitungen zu benutzen, um das gesuchte Ergebnis zu finden.

### Bemerkungen:

\* Für die dritte Eigenschaft ist eigentlich nur die Unabhängigkeit der Funktion  $K$  von den Phasenraumkoordinaten nötig: die „Konstante“ kann noch von der Zeit abhängen — entsprechend einer auf dem Phasenraum gleichförmigen Funktion —, ohne den Nullwert deren Poisson-Klammer mit jeder anderen Funktion zu ändern.

\* Versetzen mit der Addition und der Poisson-Klammer bildet die Menge der Funktionen auf dem Phasenraum eines Systems eine Algebra.

### V.3.2c Fundamentale Poisson-Klammern

Seien  $\{q^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,s}$  verallgemeinerte Koordinaten und  $\{p_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,s}$  die zugehörigen konjugierten Impulse. Aus der Definition der Poisson-Klammer zweier Funktionen (V.19) und der Tatsache, dass die Phasenraumkoordinaten unabhängig voneinander sind, folgen die *fundamentalen Poisson-Klammern*

$$\begin{aligned} \{q^\alpha, q^\beta\} &= \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \\ \{q^\alpha, p_\beta\} &= \delta_\beta^\alpha \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

**Bemerkung:** Da die Poisson-Klammer zweier Funktionen selbst eine Funktion von der Zeit und der Phasenraumkoordinaten ist, bedeutet  $\delta_\beta^\alpha$  hier eine Funktion, die für  $\alpha \neq \beta$  identisch Null, für  $\alpha = \beta$  identisch gleich 1 ist.

Der Beweis der Beziehungen (V.27) ist trivial. Beispielsweise gilt

$$\{q^\alpha, p_\beta\} = \sum_{\gamma=1}^s \left( \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial q^\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial q^\gamma} \right) = \sum_{\gamma=1}^s \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\gamma,$$

wobei die zweite Gleichung die Unabhängigkeit der Koordinaten ausdrückt und zu  $\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta_\beta^\alpha$  führt.

**Definition:** Wenn Phasenraumkoordinaten  $\{q^\alpha\}$ ,  $\{p_\alpha\}$  die Gleichungen (V.27) erfüllen, so heißen sie *kanonische Variablen*.

## V.3.3 Poisson-Klammer und Zeitentwicklung

Mit Hilfe der Poisson-Klammer lässt sich die Zeitentwicklung einer Phasenraumfunktion elegant umschreiben.

### V.3.3a Zeitentwicklung einer Phasenraumfunktion

Sei jetzt  $f$  eine beliebige Funktion auf dem Phasenraum eines physikalischen Systems, dessen Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$  als bekannt angenommen wird. Die Anwendung der Kettenregel gibt für die totale Ableitung von  $f$  nach der Zeit

$$\frac{df(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))}{dt} = \frac{\partial f(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha(t).$$

Dabei können die Zeitableitungen  $\dot{q}^\alpha(t)$ ,  $\dot{p}_\alpha(t)$  der Koordinatenfunktionen mithilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (V.4) umgeschrieben werden:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \right),$$

wobei alle Funktionen im gleichen Punkt  $(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  auszuwerten sind. Unter Verwendung der Definition (V.19) der Poisson-Klammer lautet diese Zeitableitung

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}. \quad (\text{V.28})$$

Insbesondere werden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (V.4) zu

$$\begin{aligned} \frac{dq^\alpha}{dt} &= \{q^\alpha, \mathcal{H}\} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= \{p_\alpha, \mathcal{H}\} \end{aligned} \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s, \quad (\text{V.29})$$

weil die Projektionen  $q^\alpha(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = q^\alpha$ ,  $p_\alpha(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = p_\alpha$  auf die Koordinatenachsen der Position im Phasenraum trotz ihrer Notation keine explizite Funktion der Zeit sind. In dieser Form besitzen die Bewegungsgleichungen für alle Koordinatenfunktionen die gleiche Form.